EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z + 2\overline{z} = 3 + i$. Să se calculeze modulul numărului z.

5p **2.** Să se dea un exemplu de ecuație de gradul al doilea cu coeficienți întregi care are o soluție egală cu $\sqrt{3}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_x 2 + \log_{\sqrt{x}} 2 = 9$.

5p **4.** Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ care conțin cel puțin un număr par.

5p **5.** Fie *G* centrul de greutate al triunghiului *ABC*. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc egalitatea $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$.

5p **6.** Știind că $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\sin a = \frac{3}{5}$, să se calculeze tg *a*.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+y-z=2 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea sistemului să aibă rangul 2.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să aibă soluții $(x_0, y_0, z_0)\in\mathbb{R}^3$ care verifică relația $x_0+y_0+z_0=4$.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să aibă o soluție unică $(x_0, y_0, z_0)\in\mathbb{Z}^3$.

2. Fie $p\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=X^4-4X+p\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se determine p astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $X+1$.

5p **b)** Să se determine p astfel încât polinomul f să aibă o rădăcină reală dublă.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $p\in\mathbb{R}$, polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ se defineşte funcția $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - nx - 1$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, funcția f_n este convexă.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ecuația $f_n(x) = 0$ are soluție unică.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, unde x_n este unica soluție a ecuației $f_n(x) = 0$.

2. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, $g(x) = \int_{-x}^{x} f(t) \cos t \, dt$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se studieze monotonia funcției g pe intervalul $[0, \pi]$.

5p **c)** Să se calculeze $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.