Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $\frac{10}{\sqrt{2}-1}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x+\frac{1}{|1+x|}=1$.

5p **3.** Să se studieze monotonia funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=2009^x+\log_{2009}x$.

5p **4.** Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, produsul cifrelor sale să fie impar?

5p **5.** Să se demonstreze că vectorii $\vec{u}=3\vec{i}+a\vec{j}$ şi $\vec{v}=(a+1)\vec{i}+a\vec{j}$ nu pot fi perpendiculari pentru nicio valoare reală a numărului *a*.

5p **6.** Să se arate că $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=(1+2\cos 2x)\cdot\sin 3x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ şi matricea $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, care are elementele de pe diagonala principală egale cu 2 şi restul elementelor egale cu 1.

5p **a)** Să se calculeze $\det(2A_2)$.

5p **b)** Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A_3 + xI_3) = 0$.

5p **c)** Să se arate că A_4 are inversă, aceasta având elementele de pe diagonala principală egale cu $\frac{4}{5}$ şi restul elementelor egale cu $-\frac{1}{5}$.

2. Fie $a,b,c \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = X^3 - aX^2 + bX - c \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

5p **a)** Să se determine a,b,c pentru care $x_1 = 2$ şi $x_2 = 1 + i$.

5p **b)** Să se arate că resturile împărțirii polinomul f la $(X-1)^2$ şi la $(X-2)^2$ nu pot fi egale, pentru nicio valoare a parametrilor a,b,c.

5p **c)** Să se arate că, dacă toate rădăcinile polinomului f sunt reale şi a,b,c sunt strict pozitive, atunci x_1, x_2, x_3 sunt strict pozitive.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg} x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x+1)-f(x)-f\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că $g(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{1+1+1^2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+2+2^2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+3+3^2}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+n+n^2}\right)$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1 e^{-x}x^n\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n=nI_{n-1}-\frac{1}{e}$, pentru orice $n\geq 2$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.