Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu rația 3. Știind că suma primilor 10 termeni ai progresiei este 150, să se determine a_1.

5p **2.** Să se determine toate perechile (a,b) de numere reale pentru care $a^2+b^2=a+b=2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg x+\lg(9-2x)=1$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{1,2,3,...,100\}$, acesta să **nu** fie divizibil cu 7.

5p **5.** Se consideră punctele $A(0,2)$, $B(1,-1)$ și $C(5,1)$. Să se determine ecuația dreptei duse din vârful *A*, perpendiculară pe dreapta *BC*.

5p **6.** Să se arate că $1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie M mulțimea matricelor de ordin 3 cu elemente reale având proprietatea că suma elementelor fiecărei linii este 0.

5p **a)** Să se arate că, dacă $A, B \in M$, atunci $A + B \in M$.

5p **b)** Să se arate că orice matrice din M este neinversabilă.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $A \in M$, atunci $A^2 \in M$.

2. Se consideră inelele $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ și $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] = \left\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că, dacă $x \in \mathbb{R}$ și $x^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, atunci $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

5p **b)** Să se arate că $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \cap \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] = \mathbb{Z}$.

5p **c)** Să se demonstreze că nu există morfisme de inele de la $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ la $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f_n:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^n+\ln x,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției f_1.

5p **b)** Să se demonstreze că funcțiile $g_n:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ g_n(x)=f_n(x)+f_n\left(\frac{1}{x}\right)$ sunt convexe.

5p **c)** Admitem că ecuația $f_n(x)=2^n$ are soluția unică x_n. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq1}$ converge la 2.

2. Fie $a\in[0,1]$ şi $I_n=\int_0^a\frac{t^n}{t+1}dt,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se demonstreze că $I_n+I_{n-1}=\frac{a^n}{n},\ \forall n\geq2$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.