Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie $z \in \mathbb{C}$ o rădăcină de ordin 3 a unităţii, diferită de 1. Să se calculeze $1+z+z^2$.

5p **2.** Să se determine soluţiile întregi ale inecuaţiei $x^2+x-6 \le 0$.

5p **3.** Fie funcţia $f:(1,\infty)\to(2,\infty)$, $f(x)=x^2+1$. Să se arate că funcţia f este bijectivă.

5p **4.** Câte numere naturale de la 1 la 100 sunt divizibile cu 6 şi cu 8?

5p **5.** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\overrightarrow{v_1}=a\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ şi $\overrightarrow{v_2}=3\vec{i}+5\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Triunghiul *ABC* are laturile $AB=3$, $BC=5$ şi $AC=7$. Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul *ABC*.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, care are toate elementele egale cu 1.

5p **a)** Să se demonstreze că $A^2 = 3A$.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(I_3 + A^3\right)$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este o matrice cu proprietatea $AB = BA$, atunci suma elementelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană ale lui B este aceeaşi.

2. Fie $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $\mathbb{Q}(\varepsilon) = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

5p **a)** Să se arate că $\varepsilon^2 \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$.

5p **b)** Să se demonstreze că inversul oricărui element nenul din $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ aparține mulțimii $\mathbb{Q}(\varepsilon)$.

5p **c)** Să se arate că mulțimea $M = \{a^2 - ab + b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu înmulțirea.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

5p **a)** Să se arate că funcția *f* este strict crescătoare.

5p **b)** Să se studieze convergența şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1=1$ şi $x_{n+1}=f(x_n),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x+1)-f(x)\leq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,3)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x}{3-x}$ şi $g(x)=\dfrac{\ln(3-x)}{x},\ \forall x\in(0,3)$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^e (3-x)f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 g(x)dx$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{t\searrow 0}\int_t^1 f(x)dx=+\infty$.