EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\sqrt[3]{3}$ aparține intervalului $\left(\sqrt{2}, \log_2 5\right)$.

5p **2.** Să se determine valorile reale ale lui m știind că $x^2 + 3x + m \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$.

5p **4.** Într-o urnă sunt 49 de bile, inscripționate cu numerele de la 1 la 49. Să se calculeze probabilitatea ca, extrăgând o bilă din urnă, aceasta să aibă scris pe ea un pătrat perfect.

5p **5.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{v} = m\vec{i} + 4\vec{j}$ sunt perpendiculari.

5p **6.** Să se arate că $\operatorname{tg}1^\circ \cdot \operatorname{tg}2^\circ \cdot \operatorname{tg}3^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}89^\circ = 1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + (m^2 - m - 1)y + (m+1)z = 2 \\ 2x + (m^2 - m - 2)y + 2(m+1)z = 3 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se demonstreze că sistemul are soluție unică dacă şi numai dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

5p **b)** Să se arate că pentru $m \in \{0,1\}$ sistemul este incompatibil.

5p **c)** Să se arate că dacă $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ este soluție a sistemului, atunci $x_0 - y_0 + 2009 \cdot z_0 = 1$.

2. Se consideră mulțimile $H = \{a^2 \mid a \in \mathbb{Z}_7\}$ şi $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_7, a \neq \hat{0} \text{ sau } b \neq \hat{0} \right\}$.

5p **a)** Să se determine elementele mulțimii *H*.

5p **b)** Fie $x, y \in H$ astfel încât $x + y = \hat{0}$. Să se arate că $x = y = \hat{0}$.

5p **c)** Să se arate că *G* este grup abelian în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}$.

5p **a)** Să se arate că dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c)** Să se studieze derivabilitatea funcției *f*.

2. Se consideră funcțiile $f_n:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{1}{\cos^n x+\sin^n x},\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{f_1(x)}dx$.

5p **b)** Să se arate că, dacă F este o primitivă a funcției f_4, atunci $F''(x)=\left(f_4(x)\right)^2\sin 4x,\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\, f_1(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\, f_1(x)dx=\frac{\pi-1}{4}$.