EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se verifice că numărul $1+i$ este rădăcină a ecuației $z^4+4=0$.

5p **2.** Să se arate că vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+9$ se află pe dreapta de ecuație $x+y=7$.

5p **3.** Fie $f:\{1,2,3\}\to\{4,5,6\}$ o funcție injectivă. Să se arate că $f(1)+f(2)+f(3)=15$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă ambele cifre impare.

5p **5.** Se consideră punctele $A(1,0), B(2,3)$ şi $C(-1,4)$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Fie $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $\sin a=\frac{1}{4}$. Să se calculeze $\sin 3a$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare cu coeficienți reali $\begin{cases} x+ay+(b+c)z=0 \\ x+by+(c+a)z=0 \\ x+cy+(a+b)z=0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $a,b,c\in\mathbb{R}.$, sistemul admite soluții nenule.

5p **c)** Să se rezolve sistemul, știind că $a\neq b$ şi că $(1,1,1)$ este soluție a sistemului.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix} \middle| x,y\in\mathbb{R}, x^2+y^2\neq 0\right\}$.

5p **a)** Să se demonstreze că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

5p **b)** Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

5p **c)** Să se arate că funcția $f:(\mathbb{C}^*,\cdot)\to(G,\cdot)$ cu $f(x+iy)=\begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ este izomorfism de grupuri.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, definit prin $a_0=\sqrt{3}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Să se arate că $(a_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător.

5p **b)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}$.

2. Fie funcția $f:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to(0,\infty)$, $f(x)=\int_0^x\dfrac{(\sin t+\cos t)\sin t}{\cos^2 t}dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **c)** Să se calculze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{f(x)}{x^2}$.