Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se verifice dacă numărul $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ aparține mulțimii $\left\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

5p **2.** Se consideră ecuația $x^2-3x+1=0$, cu rădăcinile x_1 și x_2. Să se arate că $x_1^2+x_2^2\in\mathbb{N}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}$.

5p **4.** Să se arate că oricare ar fi n natural, $n\geq 1$, are loc egalitatea $C_{2n}^{n}=2\cdot C_{2n-1}^{n}$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+4\vec{j}$. Să se calculeze modulul vectorului $\vec{u}+\vec{v}$.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, astfel încât $\sin\alpha=\frac{3}{5}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1+a^2 & ab & ac \\ ba & 1+b^2 & bc \\ ca & cb & 1+c^2 \end{pmatrix}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi A^* adjuncta sa.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Să se verifice că $\det(A^*)=(\det A)^2$.

5p **c)** Să se arate că matricea $A-I_3$ are rangul cel mult 1.

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup. Pentru fiecare element $a\in G$ se defineşte funcția $f_a:G\to G,\ f_a(x)=ax, \forall x\in G$.

5p **a)** Să se arate că f_a este bijectivă, pentru orice $a\in G$.

5p **b)** Să se arate că $f_a\circ f_b=f_{ab},\ \forall a,b\in G$.

5p **c)** Fie $\mathcal{F}(G)=\{f_a:G\to G \mid a\in G\}$. Să se arate că $\mathcal{F}(G)$ împreună cu operația de compunere a funcțiilor formează un grup.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln x$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f nu admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că ecuația $f(x)=0$ are o soluție unică $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{xe^x-1}{x-x_0}=f'(x_0)$, unde x_0 este numărul definit la punctul **b)**.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, definit prin $I_n=\int_0^1\frac{\ln(x^n+1)}{x+1}dx$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine I_1.

5p **b)** Să se arate că şirul I_n este strict descrescător.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$ (se consideră cunoscut faptul că $\ln(1+t)\leq t,\ \forall t\in(-1,\infty)$.