EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $a=-\sqrt[3]{27}, b=\log_2 \frac{1}{16}$ și $c=-2$.

5p **2.** Să se determine valorile parametrului real m știind că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx-2m$ se află situată deasupra axei Ox.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(\sqrt{x^2+x-2}\right)=1$.

5p **4.** Se consideră dreptele paralele d_1, d_2 și punctele distincte $A,B,C\in d_1$, $M,N,P,Q\in d_2$. Să se determine numărul triunghiurilor care au toate vârfurile în mulțimea celor șapte puncte date.

5p **5.** Să se determine coordonatele simetricului punctului $A(-3;2)$ față de mijlocul segmentului $[BC]$, unde $B(1;-4)$ și $C(-5,-1)$.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului ABC în care $AM=BC=4$, unde M este mijlocul lui (BC), iar $m(\sphericalangle AMC)=150^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $M_x=\frac{x}{3}A+\frac{1}{3x^2}B$, cu $x\in\mathbb{R}^*$.

5p **a)** Să se calculeze produsul AB.

5p **b)** Să se arate că $M_xM_y=M_{xy}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}^*$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice x real nenul, $\det(M_x)\neq 0$.

2. Se consideră polinomul $p=X^4-aX^3-aX+1$, cu $a\in\mathbb{R}$ și cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se verifice că $x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$.

5p **b)** Să se arate că polinomul p nu este divizibil cu X^2-1 pentru nicio valoare a lui a.

5p **c)** Să se arate că dacă $a=\frac{1}{2}$, atunci toate rădăcinile polinomului p au modulul 1.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$ şi funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1+x)^{\alpha}-\alpha x$.

5p **a)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **b)** Să se demonstreze că $(1+x)^{\alpha} > 1+\alpha x, \forall x \in (-1,\infty)\setminus\{0\}, \forall \alpha \in (1,\infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $2f(x+y) \le f(2x)+f(2y), \forall x,y \in [0,\infty)$.

2. Fie funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^3 f^2(x)[x]dx$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

5p **c)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\ge 1}$, dat de $a_n = f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n)-\int_0^n f(x)dx$, este convergent.