Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine $z \in \mathbb{C}$ știind că $\frac{\bar{z}+7i}{z}=6$.

5p **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(50)$.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(x)=3x+1$. Să se demonstreze că funcția f este neinversabilă.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o cifră din mulțimea $\{0,1,2,...,9\}$, aceasta să verifice inegalitatea $(x+1)!-x!\le 100$.

5p **5.** Să se arate că dreptele de ecuații d_1: $2x-y+1=0$ și d_2: $2x+y-1=0$ sunt simetrice față de axa *Oy*.

5p **6.** Să se calculeze $\cos\frac{7\pi}{12}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se verifice relația $A^3 - A = A^2 - I_3$.

5p **b)** Să se arate că $A^n - A^{n-2} = A^2 - I_3, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, suma elementelor matricei A^n este $n+3$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se definește polinomul $P_n = X^n - 1 \in \mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se determine rădăcinile complexe ale polinomului P_4.

5p **b)** Să se descompună polinomul P_3 în factori ireductibili în $\mathbb{C}[X]$.

5p **c)** Să se descompună polinomul P_6 în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$.

5p **a)** Să se studieze derivabilitatea funcției f în origine.

5p **b)** Să arate că, pentru orice $k\in(0,\infty)$, există $c\in(k,k+1)$ astfel încât $f(k+1)-f(k)=\frac{1}{\sqrt[3]{c}}$.

5p **c)** Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\geq1}$, $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-f(n)$, este strict descrescător.

2. Fie funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(1+x)$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to0}\frac{F(x)}{x^5}$, unde funcția $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $x\in[0,+\infty)$.

5p **c)** Să se arate, folosind eventual funcția *f*, că $\int_0^1\ln(1+x)dx\leq\frac{5}{12}$.