Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\frac{25}{4+3i}+\frac{25}{4-3i}$ este întreg.

5p **2.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m^2-2)x-3$ să fie strict descrescătoare.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale pare de două cifre , acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** Pe laturile *AB* şi *AC* ale triunghiului *ABC* se consideră punctele *M* şi respectiv *N* astfel încât $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$ şi $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Să se demonstreze că vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari.

5p **6.** Să se calculeze $\sin\frac{11\pi}{12}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi $B = A + A^t$, unde A^t este transpusa matricei A.

5p **a)** Să se arate că $B^t = B$.

5p **b)** Să se demonstreze că, dacă $B = 2I_2$, atunci $\det(A) \geq 1$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $x, y \in \mathbb{C}$ şi matricea $xA + yA^t$ este inversabilă, atunci $x + y \neq 0$.

2. Se consideră ecuația $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, şi x_1, x_2, x_3 soluțiile complexe ale acesteia.

5p **a)** Ştiind că $p = 1$ şi $q = 0$, să se determine x_1, x_2, x_3.

5p **b)** Să se determine p şi q ştiind că $x_1 = 1 + i$.

5p **c)** Să se arate că $12(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7) = 7(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln\frac{2x+1}{2x+3}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să arate că $f(x)<0, \forall x\in(0,\infty)$.

5p **c)** Să demonstreze că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)$ este strict descrescător.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este impară.

5p **b)** Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f(x)dx\leq e-2$.