# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
# Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.**
**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL I (30p)**

5p **1.** Să se determine primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1$, 6, $b_3$, 24, ... .

5p **2.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (3-m^2)x + 3$, să fie strict crescătoare.

5p **3.** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{3\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea *M* a tuturor funcțiilor definite pe $A = \{1,2,3\}$ cu valori în $B = \{5,6,7\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o funcție din mulțimea *M*, aceasta să fie injectivă .

5p **5.** Se consideră punctul *G*, centrul de greutate al triunghiului *ABC*. Prin punctul *G* se duce paralela la *AB* care intersectează dreapta *BC* în punctul *P*. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{GP} = m\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Să se calculeze $\cos 2\alpha$, știind că $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

**SUBIECTUL II (30p)**

**1.** Fie sistemul $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+my+mz=-2 \end{cases}$, cu $m\in\mathbb{R}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se arate că $\operatorname{rang}(A)\neq 2$, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine valorile întregi ale lui $m\neq 1$, pentru care sistemul are soluție cu componente întregi.

**2.** Fie permutările $\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \gamma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, elemente ale grupului $(S_4,\cdot)$.

5p **a)** Să se verifice că $\gamma$ este soluție a ecuației $\alpha x = x\beta$.

5p **b)** Să se arate că $\alpha^4=\beta^4$.

5p **c)** Să se determine o soluție a ecuației $x\beta^3=\alpha^3 x$ în $S_4$.

**SUBIECTUL III (30p)**

**1.** Se consideră mulțimea de funcții
$M=\{f:[-1,1]\to\mathbb{R} \mid f$ este de două ori derivabilă şi $f(0)=0,\ f'(0)=1\}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $u:[-1,1]\to\mathbb{R},\ u(x)=e^x\sin x$ aparține mulțimii *M*.

5p **b)** Să se arate că , dacă $f\in M$ şi $f(x)\neq 0,\ \forall x\in[-1,1]\setminus\{0\}$, atunci $\lim\limits_{x\to 0}(1+f(x))^{\frac{1}{x}}=e$.

5p **c)** Să demonstreze că, dacă $f\in M$ şi $n\in\mathbb{N}^*$, atunci $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^n(x)-x^n}{x^{n+1}}=\dfrac{nf''(0)}{2}$.

**2.** Fie funcțiile $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ şi $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se arate că $g(x)=\ln(1+x)$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f^2(x)g(x)dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+...f\left(\frac{n}{n}\right)\le n\ln 2,\forall n\in\mathbb{N}^*$.