Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine primul termen al progresiei aritmetice $a_1, a_2, 13, 17, \ldots$.

5p **2.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2\sin x$ este impară.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă suma cifelor egală cu 2.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că dreptele $d_1: mx+3y-2=0$ şi $d_2: 12x+2y+1=0$ sunt perpendiculare.

5p **6.** Știind că $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, să se calculeze $\sin\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax+y+z=4 \\ x+2y+3z=6 \\ 3x-y-2z=b \end{cases}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine a,b pentru care sistemul are soluția $(1, 1, 1)$.

5p **b)** Să se determine a,b astfel încât sistemul să fie incompatibil.

5p **c)** Să se arate că pentru orice $a\in\mathbb{Z}$ există $b\in\mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să admită soluții cu toate componentele numere întregi.

2. Se consideră mulțimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ b & c & a \end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbb{Z}_2\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii A.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $X\in A$, $X^2=I_3$ sau $X^2=O_3$.

5p **c)** Să se determine numărul matricelor X din mulțimea A care au proprietatea $X^2=O_3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este bijectivă.

5p **b)** Să se arate că $f(x)\geq 2x+1, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $f(x)\geq mx+1, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci $m=2$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin^3 x\cos x$ şi F o primitivă a funcției f pe $\mathbb{R}$.

5p **a)** Să arate că există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $4F(x)=\sin^4 x+c$.

5p **b)** Să se calculeze aria subgraficului restricției funcției f la intervalul $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^{\pi} f^{2n+1}(x)dx=0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.