Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, de termen general $a_n = n^2 - n$, este strict monoton.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=x^2+2x+1$ şi $g(x)=x-2009$. Să se demonstreze că, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)\geq 0$.

5p **3.** Să se rezolve în $(0,\pi)$ ecuația $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

5p **4.** Să se determine $x\in\mathbb{N}$, $x\geq 3$ ştiind că $C_x^{x-1}+C_{x-1}^{x-3}\leq 9$.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că dreptele $d_1:\ mx+(m+2)y-1=0$ şi $d_2:\ (m+2)x+4my-8=0$ sunt paralele.

5p **6.** Fie ABC un triunghi cu $\operatorname{tg}A=2$, $\operatorname{tg}B=3$. Să se determine măsura unghiului C.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 3y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\}$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ şi $AY = YA,$ atunci $Y \in M$.

5p **b)** Să se arate că dacă $X \in M$ şi $\det(X) = 0$, atunci $X = O_2$.

5p **c)** Să se arate că $A^n \in M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f = X^5 - X^4 + 3X^3 - X^2 - 2 \in \mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se determine o rădăcină întreagă a polinomului *f*.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_5^2$, unde $x_1, x_2, ..., x_5$ sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Să se arate că f are o singură rădăcină reală.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(-\infty,-2)\cup(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-2)$.

5p **b)** Să calculeze limita şirului $(a_n)_{n\geq 1},\ a_n=f(1)+f(2)+...+f(n)-\ln\frac{n(n+1)}{2}$.

5p **c)** Să se arate că există un punct $c\in(1,2)$ astfel încât $(c-1)f'(c)+f(c)=f(2)$.

2. Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{1+x^4}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $\frac{\pi}{4}\leq\int_0^1 f(x)dx\leq 1$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{f(x)f''(x)-\left(f'(x)\right)^2}{\left(f(x)\right)^2}dx$.