Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de termen general $a_n = \dfrac{4n}{n+3}$, este crescător.

5p **2.** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a parabolelor $y = x^2 + x + 1$ și $y = -x^2 - 2x + 6$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

5p **4.** Suma coeficienților binomiali ai dezvoltării $\left(2x^2 - 5y\right)^n$ este egală cu 32. Să se determine termenul de rang patru.

5p **5.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât dreptele $d_1: mx + 3y + 2 = 0$ și $d_2: 2x + y - 8 = 0$ să fie concurente.

5p **6.** Fie $ABCD$ un patrulater. Să se arate că dacă $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, atunci $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimile $P=\left\{S\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid S^t=S\right\}$ şi $Q=\left\{A\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid A^t=-A\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\in P$ şi $\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\in Q$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $A,B\in Q$, atunci $AB\in P$.

5p **c)** Să se arate că $\det(X)\geq 0$, oricare ar fi $X\in Q$.

2. Se consideră polinoamele $f=X^3+2X^2+3X+45\in\mathbb{Z}[X]$ și $\hat{f}=X^3+X+\hat{1}\in\mathbb{Z}_2[X]$.

5p **a)** Să se arate că rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului f nu sunt toate reale.

5p **b)** Să se arate că polinomul $\hat{f}$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_2$.

5p **c)** Să se demonstreze că polinomul f nu poate fi scris ca produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q} \\ x^3, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

5p **a)** Să arate că $\left|f(x)\right|\le|x|, \forall x\in[-1,1]$.

5p **b)** Să arate că funcția f este continuă în origine.

5p **c)** Să se arate că funcția *f* nu este derivabilă în origine.

2. Se consideră $a,b\in\mathbb{R}$ şi funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} axe^x-x, & x\le 0 \\ x\cos x+b, & x>0\end{cases}$.

5p **a)** Să se determine a şi b ştiind că funcția f este primitivă pe $\mathbb{R}$ a unei funcții.

5p **b)** Ştiind că $a=0$ şi $b=0$, să se calculeze $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $b=0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi} x^n f(x)dx=-\infty$.