Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine $x>0$ ştiind că numerele x, 6 şi $x-5$ sunt în progresie geometrică .

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x-2$. Să se calculeze $f\left(2\cdot\left(f(-1)\right)\right)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

5p **4.** Să se arate că $(n!)^2$ divide $(2n)!$, pentru oricare n natural.

5p **5.** Se consideră punctele $A(3,2)$ şi $B(6,5)$. Să se determine coordonatele punctelor M şi N ştiind că acestea împart segmentul $[AB]$ în trei segmente congruente, iar ordinea punctelor este A, M, N, B.

5p **6.** Să se determine numerele naturale a pentru care numerele a, $a+1$ şi $a+2$ sunt lungimile laturilor unui triunghi obtuzunghic.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2 = 2A$.

5p **a)** Să se arate că matricea $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ verifică relația $B^2 = 2B$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $a+d \neq 2$, atunci $A=O_2$ sau $A=2I_2$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a+d=2$, atunci $\det(A)=0$.

2. Se consideră polinoamele $f,g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - 1$, $g = X^6 - 1$.

5p **a)** Să se arate că un cel mai mare divizor comun al polinoamelor f și g este $X^2 - 1$.

5p **b)** Să se determine numărul soluțiilor complexe distincte ale ecuației $f(x)g(x)=0$.

5p **c)** Să se descompună polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + \ln x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f_2 este strict crescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ecuația $f_n(x) = 0$ are exact o rădăcină reală, situată în intervalul $\left(\frac{1}{e},1\right)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{f_2(x)-1} - \frac{1}{x-1}\right)$.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-\infty,0] \\ 1+\sin x, & x \in (0,\infty) \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $[-2\pi, 2\pi]$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^{\pi} f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se arate că , pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi} f^n(x)\,dx \le 2^n \pi$.