EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze partea reală a numărului complex $\frac{1+4i}{4+7i}$.

5p **2.** Să se determine axa de simetrie a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-6x+1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+1}+3^{1-x}=10$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A=\{1,3,5,...,2009\}$, acesta să fie multiplu de 3.

5p **5.** Se consideră dreapta $d:2x+y-1=0$ şi punctul $A(3,\ 2)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta d.

5p **6.** Fie triunghiul ABC care are $AB=AC=5$ şi $BC=6$. Să se calculeze distanța de la centrul de greutate al triunghiului ABC la dreapta BC.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $a,b,c,d>0$, matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi funcția $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Se notează $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că dacă $\det A=0$, atunci f este funcție constantă.

5p **b)** Să se arate că, dacă $\det A\neq 0$, atunci funcția f este injectivă.

5p **c)** Să se arate că $\underbrace{(f\circ f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(x)=\dfrac{a_n x+b_n}{c_n x+d_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi mulțimea $G=\{I_2+aA+bB \mid a,b\in\mathbb{R}, a\neq -1\}$.

5p **a)** Să se arate că orice matrice din G este inversabilă.

5p **b)** Să se arate că G este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $X^2=I_2$ are o infinitate de soluții în G.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)g(x)\right)$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

5p **c)** Să se arate că $f(x)<g(x)$, pentru orice $x\in(0,\infty)$.

2. Fie $m\in\mathbb{R}$ și funcția $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x-m, x\in[0,1] \\ x\ln x, x\in(1,2] \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $m\in\mathbb{R}$, funcția f este integrabilă.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{\int_1^x t\ln t\,dt}{x-1}$.

5p **c)** Pentru $m=1$, să se demonstreze că, pentru orice $t\in(0,2)$ există $a,b\in[0,2]$, $a\neq b$, astfel încât $\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(t)$.