EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\left[\sqrt{2009}\right]+3\cdot\left\{-\frac{1}{3}\right\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x.

5p **2.** Să se determine imaginea intervalului $[2,3]$ prin funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+8}-\sqrt{x}=2$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii divizorilor naturali ai numărului 56, acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** Fie vectorii $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$ și $\vec{u}=6\vec{i}+2\vec{j}$. Să se determine $p, r\in\mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u}=p\vec{a}+r\vec{b}$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris unui triunghi care are lungimile laturilor 5 , 7 și 8.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, se notează $C(A) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}$. Se consideră matricele $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $X, Y \in C(A)$, atunci $X + Y \in C(A)$.

5p **b)** Să se arate că dacă $E_1, E_2 \in C(A)$, atunci există $\alpha \in \mathbb{C}$ astfel încât $A = \alpha I_2$.

5p **c)** Să se arate că dacă $C(A)$ conține trei dintre matricele E_1, E_2, E_3, E_4, atunci o conține și pe a patra.

2. Fie $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ două permutări din grupul $(S_5, \cdot)$.

5p **a)** Să se rezolve în S_5 ecuația $ax = b$.

5p **b)** Să se determine ordinul elementului ab în grupul $(S_5, \cdot)$.

5p **c)** Fie $k \in \mathbb{Z}$ cu $b^k = e$. Să se arate că 6 divide k.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x$ şi un număr real *m* din intervalul $(-2,\infty)$.

5p **a)** Să se determine punctele de extrem ale funcției *f*.

5p **b)** Să se demonstreze că ecuația $x^3-3x=m$ are soluție unică în mulțimea $(1,\infty)$.

5p **c)** Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f^2(x)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} xe^x, & x\le 0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine primitiva F a funcției f care are proprietatea $F(0)=-1$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.