EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât numerele 2^{a-1}, $2^{-a+2}+1$, $2^{a+1}+1$ să fie în progresie aritmetică.

5p **2.** Să se arate că vârful parabolei $y=x^2+(2a-1)x+a^2$, $a\in\mathbb{R}$, este situat pe dreapta de ecuație $4x+4y=1$.

5p **3.** Să se arate că, dacă z este soluție a ecuației $z^2+2z+4=0$, atunci $z^2-\frac{8}{z}=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{11,12,\ldots,50\}$, aceasta să fie divizibil cu 2 și cu 5.

5p **5.** Trapezul isoscel $ABCD$ are bazele $[AB]$ și $[CD]$ și lungimea înălțimii egală cu 4. Să se calculeze $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|$.

5p **6.** Să se calculeze $\operatorname{tg}2\alpha$, știind că $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin\alpha=\frac{12}{13}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, transpusa $A^t \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B = AA^t$, și punctele $P_k(a_k, b_k)$, unde $k \in \{1, 2, 3\}$.

5p **a)** Să se calculeze B știind că $P_1(1,2)$, $P_2(2,4)$, $P_3(-3,-6)$.

5p **b)** Să se arate că $\det(B) \geq 0$, oricare ar fi punctele P_1, P_2, P_3.

5p **c)** Să se arate că $\det(B) = 0$ dacă și numai dacă punctele P_1, P_2, P_3 sunt coliniare pe o dreaptă care trece prin originea axelor.

2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii M.

5p **b)** Să se arate că $AB \in M$, pentru orice $A, B \in M$.

5p **c)** Să se arate că $(M, \cdot)$ este un grup, unde „$\cdot$” este înmulțirea matricelor.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$.

5p **a**) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

5p **b**) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.

5p **c**) Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f către $+\infty$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $I_n = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze I_2.

5p **b**) Să se demonstreze că $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c**) Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, are limita 0.