EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră $a \in \mathbb{R}$ şi numărul complex $z = \frac{a+2i}{2+ai}$. Să se determine *a* pentru care $z \in \mathbb{R}$.

5p **2.** Să se demonstreze că dreapta de ecuație $y = 2x + 3$ intersectează parabola de ecuație $y = x^2 - 4x + 12$ într-un singur punct.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-1} = x$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând o pereche (a, b) din produsul cartezian $A \times A$ să avem egalitatea $a + b = 6$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $M(2, -1)$, $A(1, 2)$ şi $B(4, 1)$. Să se determine lungimea vectorului $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.

5p **6.** Să se arate că $\sin(a+b) \cdot \sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$, pentru oricare $a, b \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$B = I_3 + A$, $C = I_3 + aA$, cu $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $S = A - XY$.

5p **b)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $BC = I_3$.

5p **c)** Să se arate că $A^{n+1} = 14A^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 1 \in \mathbb{R}[X]$ şi numărul $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, astfel încât $f(\varepsilon) = 0$.

5p **a)** Să se demonstreze că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe sistemul $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y\varepsilon + z\varepsilon^2 = 0 \\ x + y\varepsilon^2 + z\varepsilon = 0 \end{cases}$.

5p **c)** Să se arate că, dacă f divide $f_1(X^3) + Xf_2(X^3) + X^2 f_3(X^3)$, unde f_1, f_2, f_3 sunt polinoame cu coeficienți complecşi, atunci fiecare dintre polinoamele f_1, f_2, f_3 este divizibil cu $X - 1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției f are exact două puncte de inflexiune.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $-\infty$.

2. Se consideră funcțiile $F_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F_n(x)=\int_0^x t\sin^n t\,dt,\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $F_1(\pi)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $F_{n+1}(1)<F_n(1),\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(1)$.