EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră numărul raţional $\frac{1}{7}$ scris sub formă de fracţie zecimală infinită $\frac{1}{7} = 0,a_1a_2a_3\ldots$. Să se determine a_{60}.

5p **2.** Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-x$, $g(x)=3x+2$. Să se calculeze $(f\circ g)(x)-(g\circ f)(x)$.

5p **3.** Să se demonstreze că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^3+1$ este injectivă.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 50.

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care punctele $A(1,-2)$, $B(4,1)$ şi $C(-1,a)$ sunt coliniare.

5p **6.** Fie ABC un triunghi care are AB = 3, AC = 5 şi BC = 7. Să se calculeze $\cos A$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu proprietatea că $A^2 = O_2$.

5p **a)** Să se arate că $a + d = 0$.

5p **b)** Să se arate că matricea $I_2 + A$ este inversabilă.

5p **c)** Să se arate că ecuația $AX = O_2$ are o infinitate de soluții în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 - 2X^2 + 9$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$, numărul $a = \sqrt{2} + i$ și mulțimile $A = \left\{ g(a) \mid g \in \mathbb{Q}[X] \right\}$ și $B = \left\{ h(a) \mid h \in \mathbb{Q}[X], \text{grad}(h) \le 3 \right\}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(a)$.

5p **b)** Să se calculeze $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|$.

5p **c)** Să se arate că $A = B$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{\sqrt{3}\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-x}$ şi şirul $(a_n)_{n\geq1}$ definit prin $a_1=2,\ a_{n+1}=f(a_n),\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty,\sqrt{3})$ şi pe $(\sqrt{3},\infty)$.

5p **b**) Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **c**) Să se demonstreze că şirul $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu este convergent.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-x^2}$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F\left(x\right)=\int_1^x f(t)dt$.

5p **a**) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției F.

5p **b**) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

5p **c**) Să se calculeze $\int_0^1 F(x)\,dx$.