EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului $(2+i)^3+(2-i)^3$.

5p **2.** Graficul unei funcții de gradul al doilea este o parabolă care trece prin punctele $A(1,-3)$, $B(-1,3)$, $C(0,1)$. Să se calculeze valoarea funcției în punctul $x=2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3\cdot 4^x-6^x=2\cdot 9^x$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{0,1,2,...,2009\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea *A*, acesta să fie divizibil cu 5.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(0,-3)$ și $B(4,\ 0)$. Să se calculeze distanța de la punctul *O* la dreapta *AB*.

5p **6.** Să se calculeze aria unui paralelogram $ABCD$ cu $AB=6$, $AD=8$ și $m(\sphericalangle ADC)=135^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 4 & -3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 5\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că ecuația $AX=B$ are o infinitate de soluții $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

5p **b)** Să se verifice că $A^3=10A$.

5p **c)** Să se determine rangul matricei A^*, adjuncta matricei A.

2. Se consideră mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$, funcția $f:\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\to\mathbb{Z}$, $f(a+b\sqrt{2})=a^2-2b^2$, $\forall a,b\in\mathbb{Z}$ şi mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \mid f(x)=-1\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $7+5\sqrt{2}\in A$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, $f(xy)=f(x)f(y)$.

5p **c)** Să se arate că mulțimea A este infinită.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=x-\ln(e^x+1)$.

5p **a**) Să se arate că funcția f' este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b**) Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty} x^a f(x)=0, \forall a\in\mathbb{R}$.

5p **c**) Să se determine asimptotele graficului funcției f.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $I_n=\int_0^2 (2x-x^2)^n dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze I_1.

5p **b**) Să se demonstreze că $(2n+1)I_n=2nI_{n-1}, \forall n\in\mathbb{N}^*, n\ge 2$.

5p **c**) Să se arate că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tinde descrescător către 0.