Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\log_4 16 + \log_3 9 + \sqrt[3]{27}$ este natural.

5p **2.** Să se determine valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2+4x+2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x + 3\cdot 4^x = 4$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\left\{\sqrt{n}\ \mid n\in\mathbb{N},\ n<100\right\}$, acesta să fie număr rațional.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,3)$ și $D(a,4)$, unde $a\in\mathbb{R}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât dreptele AB și CD să fie paralele.

5p **6.** Știind că $x\in\mathbb{R}$ și că $\operatorname{tg} x=\frac{1}{2}$, să se calculeze $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A = aI_3 + bB + cB^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze B^3.

5p **b)** Să se calculeze B^{-1}.

5p **c)** Să se demonstreze că $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a+b+c)\det(A) \geq 0$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ şi $H = \left\{ x^2 \mid x \in \mathbb{Z}_7 \right\}$.

5p **a)** Să se arate că $H = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{Z}_7$ există $x, y \in \mathbb{Z}_7$ astfel încât $a = x^2 + y^2$.

5p **c)** Să se arate că $\{x^{2000} \mid x \in \mathbb{Z}_7\} = H$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ și șirul $(a_n)_{n\geq1},\ a_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+...+\frac{1}{n\sqrt{n}},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se arate că funcția f' este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **b**) Să se demonstreze că $\frac{1}{2(k+1)\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\frac{1}{2k\sqrt{k}},\ \forall k\in\mathbb{N}^*$.

5p **c**) Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\geq1}$ este convergent.

2. Se consideră funcțiile $f_n:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\int_0^x t^n \operatorname{arctg} t\,dt,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se arate că $f_1(x)=\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2},\ \forall x\geq0$.

5p **b**) Să arate că $f_n(1)\leq\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{n+1},\forall n\geq1$.

5p **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nf_n(1)$.