Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră numărul real $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2009}}$. Să se demonstreze că $s \in (1; 2)$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ și $g(x) = -4x + 1$. Să se determine coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin x = 1 + \cos^2 x$.

5p **4.** Fie mulțimea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Să se determine numărul funcțiilor pare $f : A \to A$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(2, -1)$, $B(-1, 1)$ și $C(1, 3)$. Să se determine coordonatele punctului *D* știind că patrulaterul *ABCD* este paralelogram.

5p **6.** Știind că $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ și că $\sin x = \frac{3}{5}$, să se calculeze $\sin \frac{x}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră în $\mathbb{R}^3$ sistemul $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=a \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că determinantul matricei sistemului are valoarea $(a+2)(a-1)^2$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p **c)** Să se rezolve sistemul în cazul $a=-2$.

2. Se consideră mulțimea $G \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 10b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a^2 - 10b^2 = 1 \right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $A = \begin{pmatrix} 19 & 60 \\ 6 & 19 \end{pmatrix} \in G$.

5p **b)** Să se arate că $X \cdot Y \in G$, pentru oricare $X, Y \in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că mulțimea G este infinită.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg} x$.

5p **a**) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

5p **b**) Să se demonstreze că $0<f(x)\le\frac{\pi}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c**) Să se demonstreze că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)+\operatorname{arctg}\frac{(x+1)^2}{2}$ este constantă.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg} x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a**) Să se calculeze $\int_1^2\frac{f'(x)}{x}dx$.

5p **b**) Să se determine $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}\int_0^x f(t)dt$.

5p **c**) Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții şi dreptele $x=0$ şi $x=1$.