Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se demonstreze că numărul $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ este natural.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+2$. Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor nevide ale mulțimii $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, aceasta să aibă produsul elementelor 120.

5p **5.** Se consideră punctele $A(0,2)$, $B(1,-1)$ și $C(3,4)$. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului *ABC*.

5p **6.** Să se demonstreze că $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră numerele reale a, b, c, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+2x+3$ și determinanții

$$A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix} \text{ și } B=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ f(a) & f(b) & f(c)\end{vmatrix}.$$

5p **a)** Să se arate că $A=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

5p **b)** Să se arate că $A=B$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice trei puncte distincte, cu coordonate naturale, situate pe graficul funcției f, aria triunghiului cu vârfurile în aceste puncte este un număr natural divizibil cu 3.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -9\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\left\{ X(a)=I_2+aA \,\middle|\, a\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, a,b\in\mathbb{R}$, $X(a)X(0)=X(a)$ și $X(a)X(b)=X(a+b-10ab)$.

5p **b)** Să se arate că mulțimea $H=\left\{ X(a) \,\middle|\, a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{10}\right\}\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^2=I_2$, $X\in G$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\frac{x^3}{6}-\sin x$.

5p **a**) Să se determine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

5p **b**) Să se calculeze derivata a doua a doua funcției *f*.

5p **c**) Să se demonstreze că $f(x)\le 0, \forall x\ge 0$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$.

5p **a**) Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$ este o primitivă a funcției f.

5p **b**) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c**) Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit de $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, este convergent.