<u>Ministerul Educației, Cercetării și Inovării</u>
<u>Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar</u>

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se demonstreze că numărul $a=\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-2\sqrt{3}}$ este număr natural.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-5x+2$. Să se rezolve inecuația $f\left(2x\right)\le 0$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x=\sqrt{2-x}$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor nevide ale mulțimii $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, aceasta să aibă toate elementele impare.

5p **5.** Fie punctele $A(2,0)$, $B(1,1)$ și $C(3,-2)$. Să se calculeze $\sin C$.

5p **6.** Știind că $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și că $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2$, să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ mx+y+z=m-1 \\ x+my+2z=-1 \end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(A)=0$.

5p **b)** Să se arate că pentru orice $m\in\mathbb{R}$ sistemul este compatibil.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că sistemul are o soluție (x_0, y_0, z_0) cu $z_0=2$.

2. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$, submulțimea $G=\left\{ X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3) \,\middle|\, X=\begin{pmatrix} a & \hat{2}b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}$ şi matricele $O_2=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că dacă $x, y\in\mathbb{Z}_3$, atunci $x^2+y^2=\hat{0}$ dacă şi numai dacă $x=y=\hat{0}$.

5p **b)** Să se arate că mulțimea $H=G\backslash\{O_2\}$ este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^2=I_2$, $X\in G$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ şi funcţiile $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^{2n-1} + x^{2n}, g_n(x) = x^{2n+1} + 1$.

5p **a**) Să se verifice că $f_n'(x) = \dfrac{g_n'(x)}{x+1} - \dfrac{g_n(x)}{(x+1)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

5p **b**) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

5p **c**) Să se demonstreze că f_n are exact un punct de extrem local.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x^3} dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze I_2.

5p **b**) Să se demonstreze că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

5p **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.