Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z = 1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^6$.

5p **2.** Să se determine valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + x$.

5p **3.** Să se rezolve în intervalul $(0;\infty)$ ecuația $\lg^2 x + 5\lg x - 6 = 0$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{0,1,2,3\} \to \{0,1,2,3\}$ care au proprietatea $f(0) = f(1) = 2$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $O(0, 0)$, $A(1, 2)$ și $B(3, 1)$. Să se determine măsura unghiului AOB.

5p **6.** Știind că $\alpha \in \mathbb{R}$ și că $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$, să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei $A+I_2$.

5p **b)** Să se demonstreze că dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AX=XA$, atunci există $x, y\in\mathbb{C}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se demonstreze că ecuația $Y^2=A$ nu are nicio soluție în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x*y=x+y+xy$.

5p **a)** Să se arate că legea „$*$” este asociativă.

5p **b)** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+1$. Să se verifice relația $f(x*y)=f(x)\cdot f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*...*\frac{1}{2008}*\frac{1}{2009}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-1)\arcsin x.$

5p **a**) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2-x}$.

5p **b**) Să se determine punctele în care funcția f nu este derivabilă.

5p **c**) Să se arate că funcția f este convexă.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^x f(t)\,dt.$

5p **a**) Să se arate că funcția F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b**) Să se arate că funcția F este bijectivă.

5p **c**) Să se calculeze $\int_0^a F^{-1}(x)\,dx$, unde F^{-1} este inversa funcției F și $a=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}$.