Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică informa- tică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - .informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $(1-i)(1+2i)-3(2-i)$.

5p **2.** Să se arate că pentru oricare $a\in\mathbb{R}^*$, dreapta $y=x+4$ intersectează parabola $y=ax^2+(a-2)x+1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x}-3\cdot 2^{x+1}+8=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{10,11,12,...,40\}$, suma cifrelor lui să fie divizibilă cu 3.

5p **5.** În triunghiul *ABC* punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor. Fie *H* ortocentrul triunghiului *MNP*. Să se demonstreze că $AH=BH=CH$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea S_3 a permutărilor de 3 elemente se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că permutarea σ este pară.

5p **b)** Să se determine toate permutările $x \in S_3$, astfel încât $x\sigma = \sigma x$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $x^2 = \sigma$, cu $x \in S_3$.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \left\{ X(a) = I_2 + aA \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $X(a)X(b) = X(ab + a + b)$.

5p **b)** Să se arate că $(G, \cdot)$ este un grup abelian, unde „$\cdot$” reprezintă înmulțirea matricelor.

5p **c)** Să se determine $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $X(1)X(2)...X(2009) = X(t-1)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x$.

5p **a)** Să se arate că funcția este convexă pe intervalul $(0,e]$.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcției.

5p **c)** Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 3}$, dat de $a_n=\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}+\frac{\ln 5}{5}+\ldots+\frac{\ln n}{n}-f(n)$, este descrescător.

2. Se consideră funcția $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$.

5p **a)** Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f și axele de coordonate.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$.