EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$ este întreg.

5p **2.** Să se determine imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-x+2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{-2x+1}=5$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a+b=4$.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(-1,1)$ şi este perpendiculară pe dreapta $d:5x-4y+1=0$.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC ştiind că $AB=6$, $B=\frac{\pi}{4}$ şi $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze A^2-B^2.

5p **b)** Să se calculeze $\det(I_2+A+A^2+A^3+A^4)$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $X^2=I_2$ are o infinitate de soluții în $M_2(\mathbb{Z})$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Q}[X]$, $f=X^4+X^3+X^2+X+1$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ și $g=X^2-1$.

5p **a)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

5p **b)** Să se calculeze $(1-x_1)\cdot(1-x_2)\cdot(1-x_3)\cdot(1-x_4)$.

5p **c)** Să se calculeze $g(x_1)\cdot g(x_2)\cdot g(x_3)\cdot g(x_4)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $x_1 \in (0,1)$ şi $x_{n+1} = \frac{x_n^5 + 3x_n}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $x_n \in (0,1), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **b)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+2}}{x_n} = \frac{9}{16}$.

2. Se consideră o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea că $xf(x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^\pi x^2 f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că funcţia f este integrabilă pe intervalul $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se arate că $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \le \cos 1$.