Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\log_3\left(5-\sqrt{7}\right)+\log_3\left(5+\sqrt{7}\right)-\log_3 2$.

5p **2.** Să se determine funcția de gradul al doilea al cărei grafic este tangent la axa *Ox* în punctul $(1,0)$ şi trece prin punctul $(0,2)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $\left[0,2\pi\right)$ ecuația $\sin x+\cos x=0$.

5p **4.** Câte numere naturale de patru cifre se pot forma cu elemente ale mulțimii $\left\{1,3,5,7,9\right\}$?

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(-2,2)$ şi este paralelă cu dreapta determinată de punctele $C(2,1)$, $D(-1,-3)$.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$. Să se calculeze $\sin\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se arate că dacă $a+b+c \neq 0$ şi A nu este inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$, atunci $a=b=c$.

5p **c)** Să se arate că sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} ax+by+cz=\frac{1}{2}x \\ cx+ay+bz=\frac{1}{2}y \\ bx+cy+az=\frac{1}{2}z \end{cases}$ admite numai soluția $x=y=z=0$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - 5X^2 + 5$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$.

5p **b)** Să se arate că polinomul *f* are toate rădăcinile reale.

5p **c)** Să se arate că dacă *g* este un polinom cu coeficienți reali care are proprietatea că pentru orice *x* real $|g(x)| \leq |f(x)|$, atunci există $a \in [-1, 1]$ astfel încât $g = af$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, se consideră funcția $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n - nx + 1$.

5p **a)** Să se arate că f_n este strict descrescătoare pe $[0;1]$ şi strict crescătoare pe $[1;\infty)$.

5p **b)** Să se arate că ecuația $f_n(x) = 0, x > 0$ are exact două rădăcini $a_n \in (0,1)$ şi $b_n \in (1, \infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n$, unde a_n s-a definit la punctul **b)**.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$ şi $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx,\ n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $I_0 = \frac{\pi}{4}$.

5p **b)** Să se arate că $I_{2n} = \frac{1}{2n-1} - I_{2n-2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

5p **c)** Să se arate că $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\right) = I_0$.