EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul natural x pentru care $1+3+5+\ldots+x=225$.

5p **2.** Să se determine valorile parametrului real m știind că graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx-2m$ intersectează axa Ox în două puncte situate la distanța 3.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(2^{-x+1}+1\right)=x$.

5p **4.** Să se arate că $C_{17}^3>C_{17}^{15}$

5p **5.** Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ de latură 4. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

5p **6.** Să se arate că $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+...+\sin^2 90^\circ=\frac{91}{2}$

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ trei puncte din plan şi matricea $M = \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se arate că, dacă A, B, C se află pe dreapta de ecuaţie $y = 2x$, atunci $\det(M) = 0$.

5p **b)** Să se arate că, dacă triunghiul *ABC* este dreptunghic şi are catetele de lungime 1, atunci $\det(M) = \pm 1$.

5p **c)** Să se arate că, dacă matricea M este inversabilă, atunci suma elementelor matricei M^{-1} este 1.

2. Se consideră mulţimea de matrice $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

5p **a)** Să se arate că, dacă $X \in A$ şi $Y \in A$, atunci $X + Y \in A$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $X \in A, Y \in A$ şi $XY = O_2$, atunci $X = O_2$ sau $Y = O_2$.

5p **c)** Admitem cunoscut faptul că *A* este inel în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor. Să se determine elementele inversabile ale acestui inel.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\sin x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este crescătoare.

5p **b)** Admitem că pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ ecuația $f(x)=n$ are o soluție unică x_n. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este nemărginit.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}$, unde şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ a fost definit la **b)**.

2. Fie funcțiile $f,g_n:[0,1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{1-x},\ g_n(x)=\dfrac{x^n}{1-x}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}}(f(x)-g_2(x))dx$.

5p **b)** Să se arate că $0\leq\int_0^{\frac{1}{2}}g_n(x)dx\leq\dfrac{1}{2^n},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 2^2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^3}+...+\dfrac{1}{n\cdot 2^n}\right)=\ln 2$.