Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z=\frac{8+i}{7-4i}$.

5p **2.** Să se determine valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+6x-9$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $[0,2\pi)$ ecuația $\sin x=-\frac{1}{2}$.

5p **4.** Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care mulțimea $\{1,2,...,n\}$ are exact 120 de submulțimi cu două elemente.

5p **5.** Se știe că, în triunghiul ABC, vectorii $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ au același modul. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC care are lungimile laturilor egale cu 3, 4 și 5.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi sistemul $\begin{cases}x+2y+3z+4t=3\\ \quad y+2z+3t=2\\ \quad\quad z+2t=1\end{cases}$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei A.

5p **b)** Să se determine mulțimea soluțiilor sistemului.

5p **c)** Să se demonstreze că ecuația $XA=B$ nu are soluții $X\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{A(k)=\begin{pmatrix}2^k & 2^k\\ 2^k & 2^k\end{pmatrix} \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, şi pentru fiecare $t\in\mathbb{Z}$ notăm cu $H_t=\left\{A(kt-1)\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. Se admite faptul că $(G,\cdot)$ este un grup, unde „$\cdot$” este înmulțirea matricelor.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, n,\ p\in\mathbb{Z}$, $A(n)\cdot A(p)=A(n+p+1)$.

5p **b)** Să se demonstreze că, pentru orice $t\in\mathbb{Z}$, H_t este un subgrup al grupului $(G,\cdot)$.

5p **c)** Să se demonstreze că grupurile $(G,\cdot)$ şi $(\mathbb{Z},+)$ sunt izomorfe.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$ şi şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $k>0$, $\frac{1}{k+1}<f(k+1)-f(k)<\frac{1}{k}$.

5p **c)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător şi are termenii pozitivi.

2. Se consideră funcțiile $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$ şi $F:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$,

$F(x)=a\ln(x+1)+b\ln(x^2+1)+c\operatorname{arctg}x$, unde a, b, c sunt parametri reali.

5p **a)** Să se determine a, b, c astfel încât F să fie o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Să se studieze monotonia funcției F, în cazul în care F este primitivă a funcției f.