Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma tuturor numerelor naturale de două cifre care se divid cu 11.

5p **2.** Să se determine funcția f de gradul al doilea știind că $f(-1)=1,\ f(0)=1,\ f(1)=3$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $(0,\pi)$ ecuația $\sin 3x = \sin x$.

5p **4.** Câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{2,4,6,8\}$?

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC cu vârfurile în $A(1,2)$, $B(2,-2)$ și $C(4,6)$. Să se calculeze $\cos B$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC știind că $C=\dfrac{\pi}{6}$ și $AB=6$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$.

5p **a)** Să se calculeze σ^{2009}.

5p **b)** Să se dea exemplu de o permutare $\tau \in S_5$ astfel încât $\tau\sigma \neq e$ şi $(\tau\sigma)^2 = e$.

5p **c)** Să se demonstreze că, pentru orice $\tau \in S_5$, există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\tau^p = e$.

2. Se consideră $a \in \mathbb{C}$, x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile ecuației $x^3 - 2x^2 + 2x - a = 0$ şi determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}.$$

5p **a)** Pentru $a = 1$, să se determine x_1, x_2 şi x_3.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, ecuația are o singură rădăcină reală.

5p **c)** Să se arate că valoarea determinantului Δ nu depinde de *a*.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{x\cdot\ln x}$.

5p **a)** Să se arate că $f'(x)=f(x)(1+\ln x), \forall x>0.$

5p **b)** Să se determine valoarea minimă a funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,\infty)$.

2. Se consideră, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, funcțiile $f_n:(-1,\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{x^{2n}}{1+x}$ și $g_n:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$,

$g_n(x)=1-x+x^2-x^3+...-x^{2n-1}+f_n(x)$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 g_2(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $0\le\int_0^1 f_n(x)dx\le\dfrac{1}{2n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}\right), n\in\mathbb{N}.$