EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $(1-i)^{24}$ este real.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{3x-1}{x+1}+\frac{x+1}{2x-1}=3$.

5p **3.** Să se determine inversa funcției bijective $f:\mathbb{R}\to(1,\infty)$, $f(x)=e^x+1$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a\neq b$.

5p **5.** Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC, unde $A(-2,-1),B(2,0),C(0,6)$.

5p **6.** Fie vectorii $\vec{u}=m\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v}=(m-2)\vec{i}-\vec{j}$. Să se determine $m>0$ astfel încât vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ să fie perpendiculari.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = aA$.

5p **b)** Să se calculeze $(A - A^t)^{2009}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^5 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Pentru a, b din mulțimea $M = [0, \infty)$ se definește operația $a * b = \ln(e^a + e^b - 1)$.

5p **a)** Să se arate că dacă $a, b \in M$, atunci $a * b \in M$.

5p **b)** Să se arate că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **c)** Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, să se determine $a \in M$ astfel încât $\underbrace{a * a * \ldots * a}_{\text{de } n \text{ ori } a} = 2a$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $a_1 \in (0,1)$ şi $a_{n+1} = a_n\left(1-\sqrt{a_n}\right)$, $\forall n\in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $a_n \in (0,1)$, $\forall n\in \mathbb{N}^*$.

5p **b)** Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

5p **c)** Să se arate că şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dat de $b_n = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$, $\forall n\in \mathbb{N}^*$, este mărginit superior de a_1.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right), x\in\mathbb{R}$, este o primitivă a funcției *f*.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței delimitate de dreptele $x=0, x=1, Ox$ şi graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(2x+1)f(x)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f(x)dx$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.