EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul natural x din egalitatea $1+5+9+...+x=231$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $2x^2-5x+3\leq 0$.

5p **3.** Să se determine inversa funcției bijective $f:(0,\infty)\to(1,\infty),\ f(x)=x^2+1$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,...,10\}$. Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii A, care conțin elementul 1.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât distanța dintre punctele $A(2,m)$ și $B(m,-2)$ să fie 4.

5p **6.** Să se calculeze $\cos\frac{23\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, cu $a, b\in \mathbb{R}$ şi $b\neq 0$.

5p **a)** Să se arate că dacă matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $AX = XA$, atunci există $u, v\in \mathbb{R}$, astfel încât $X =\begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se arate că $\forall\, n\in \mathbb{N}^*$, $A^n =\begin{pmatrix} x_n & y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$, unde $x_n = \dfrac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}$, $y_n = \dfrac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2}$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^3 =\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră $a\in \mathbb{Z}_7$ şi polinomul $f = \mathrm{X}^6 + a\mathrm{X} + \hat{5}\in \mathbb{Z}_7[\mathrm{X}]$.

5p **a)** Să se verifice că, pentru orice $b\in \mathbb{Z}_7$, $b\neq \hat{0}$, are loc relația $b^6 = \hat{1}$.

5p **b)** Să se arate că $x^6 + \hat{5} = (x^3 - \hat{4})(x^3 + \hat{4}),\ \forall x\in \mathbb{Z}_7$.

5p **c)** Să se demonstreze că pentru orice $a\in \mathbb{Z}_7$, polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_7[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră numărul real $a > 0$ şi funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - ax$.

5p **a)** Să se determine asimptota oblică la graficul funcției f către $-\infty$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției *f*.

5p **c)** Să se determine $a \in (0,\infty)$, ştiind că $f(x) \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $F:(0,\infty) \to \mathbb{R},\ F(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$, este o primitivă a funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă G a funcției f este crescătoare pe $[1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției *f*, axa Ox şi dreptele de ecuații $x = \dfrac{1}{e}$ şi $x = e$.