Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z=\left(\sqrt{2}-1+i\left(\sqrt{2}+1\right)\right)^2$.

5p **2.** Să se determine numerele reale x și y știind că $x+2y=1$ și $x^2-6y^2=1$.

5p **3.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+x+1$ nu este injectivă.

5p **4.** Să se calculeze $C_{10}^3-C_9^3$.

5p **5.** Fie *ABCD* un paralelogram. Ştiind că vectorii $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$ au acelaşi modul, să se arate că *ABCD* este dreptunghi.

5p **6.** Să se arate că $\sin 40^\circ\cdot\sin 140^\circ=\cos^2 130^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 4 \end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ ştiind că $A^2=5A$.

5p **b)** Pentru $x=2$ să se calculeze A^{2009}.

5p **c)** Să se determine $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\operatorname{rang}\left(A+A^t\right)=1$.

2. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=2X^4+2(a-1)X^3+(a^2+3)X^2+bX+c$.

5p **a)** Să se determine a,b,c, ştiind că $a=b=c$, iar restul împărțirii lui f la $X+1$ este 10.

5p **b)** Ştiind că $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ sunt rădăcinile lui f, să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

5p **c)** Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi rădăcinile polinomului f în cazul în care f are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(e^x)\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. Fie funcțiile $F, f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=e^{\sin^2 x}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția F este strict crescătoare.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xF\left(x\right)dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Numerele reale pozitive a,b,c,d sunt în progresie geometrică. Ştiind că $d-a=7$ şi $c-b=2$, să se determine rația progresiei.

5p **2.** Să se determine valorile reale nenule ale lui m ştiind că $mx^2+x-2\le 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în intervalul $(0,5)$ ecuația $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.

5p **4.** Să se determine numărul $n=C_{10}^0-C_{10}^2+C_{10}^4-C_{10}^6+C_{10}^8$.

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}-(2a+2)\vec{j}$ şi $\vec{v}=(a+1)\vec{i}-\vec{j}$ sunt perpendiculari.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$. Să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $G=\{X\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AXA^t=O_2\}$, unde A^t este transpusa matricei A.

5p **a)** Să se arate că dacă $X,Y\in G$, atunci $X+Y\in G$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $X\in G$, atunci suma elementelor lui X este egală cu 0.

5p **c)** Să se arate că dacă $X\in G$ şi $\det X=0$, atunci $X^n\in G$ pentru orice $n\in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4-6X^3+18X^2-30X+25\in \mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se arate că polinomul f se divide cu X^2-2X+5.

5p **b)** Să se arate că polinomul f nu are nicio rădăcină reală.

5p **c)** Să se arate că rădăcinile polinomului f au acelaşi modul.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(\ln x)$.

5p **a)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=e$, situat pe graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este concavă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f'(x)}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^{2\pi} xf(x)\,dx$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze modulele rădăcinilor complexe ale ecuației $z^2+2z+4=0$.

5p **2.** Să se determine funcțiile de gradul întâi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care sunt strict crescătoare şi îndeplinesc condiția $f(f(x))=4x+3$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x+4^{\frac{x+1}{2}}=12$.

5p **4.** Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de la 1 la 1000, acesta să fie cub perfect?

5p **5.** Se consideră punctele $A(1,2)$ şi $B(3,4)$. Să se calculeze distanța de la originea axelor la dreapta *AB*.

5p **6.** Să se determine $\alpha\in(0,2\pi)$ astfel ca $\operatorname{tg}\alpha=\sin\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze A^3.

5p **b)** Să se determine $\left(A\cdot A^t\right)^{-1}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^2=A,\ X\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Fie $a,b\in \mathbb{R}$ şi polinomul $f=X^{30}-3X^{20}+aX^{10}+3X^5+aX+b\in \mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se arate că restul împărțirii polinomului f la $X+1$ nu depinde de a.

5p **b)** Să se determine a şi b astfel încât restul împărțirii polinomului f la X^2-X să fie X.

5p **c)** Să se determine a şi b astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $(X-1)^2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $t \in \mathbb{R}$, se consideră funcția $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_t(x) = x^3 + t^2 x$.

5p **a)** Să se calculeze $f_t'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că fiecare funcție f_t este inversabilă.

5p **c)** Să se arate că funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = f_t^{-1}(1)$ este continuă în punctul 0.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x (t^2 + 1)\sqrt{|t|}\, dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f(1)$.

5p **b)** Să se arate că f este funcție impară.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^2 \sqrt{x}}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\left(\frac{(1-2i)(3i-1)}{5}\right)^4$.

5p **2.** Să se arate că funcția $f:(-1,1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$ este impară.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x+5^{-x}=2$.

5p **4.** Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, prima sa cifră să fie număr prim?

5p **5.** Fie ABC un triunghi și O centrul cercului circumscris lui. Știind că $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OC}$, să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

5p **6.** Fie $\alpha\in\mathbb{R}$, astfel încât $\sin\alpha+\cos\alpha=1$. Să se calculeze $\operatorname{tg} 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} a & a-b & a-b \\ 0 & b & b-c \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că A este matrice inversabilă.

5p **b)** Să se demonstreze că $A^n=\begin{pmatrix} a^n & a^n-b^n & a^n-b^n \\ 0 & b^n & b^n-c^n \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze A^{-1}.

2. Fie $f\in\mathbb{R}[X]$ un polinom astfel încât $f\left(X^2+3X+1\right)=f^2(X)+3f(X)+1$ şi $f(0)=0$.

5p **a)** Să se determine $f(-1)$.

5p **b)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la $X-5$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f=X$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f_n:[0;\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^{n+1}-(n+2)x+n,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că graficele funcțiilor f_n nu admit asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că, pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$, f_n are exact un punct de extrem x_n.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{n^2}$, unde x_n este definit la punctul **b)**.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{2n+1}, \forall n\geq 1$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $\frac{10}{\sqrt{2}-1}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x+\frac{1}{|1+x|}=1$.

5p **3.** Să se studieze monotonia funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2009^x+\log_{2009}x$.

5p **4.** Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, produsul cifrelor sale să fie impar?

5p **5.** Să se demonstreze că vectorii $\vec{u}=3\vec{i}+a\vec{j}$ și $\vec{v}=(a+1)\vec{i}+a\vec{j}$ nu pot fi perpendiculari pentru nicio valoare reală a numărului a.

5p **6.** Să se arate că $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=(1+2\cos 2x)\cdot\sin 3x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ şi matricea $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, care are elementele de pe diagonala principală egale cu 2 şi restul elementelor egale cu 1.

5p **a)** Să se calculeze $\det(2A_2)$.

5p **b)** Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A_3 + xI_3) = 0$.

5p **c)** Să se arate că A_4 are inversă, aceasta având elementele de pe diagonala principală egale cu $\frac{4}{5}$ şi restul elementelor egale cu $-\frac{1}{5}$.

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = X^3 - aX^2 + bX - c \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

5p **a)** Să se determine a, b, c pentru care $x_1 = 2$ şi $x_2 = 1 + i$.

5p **b)** Să se arate că resturile împărțirii polinomul f la $(X-1)^2$ şi la $(X-2)^2$ nu pot fi egale, pentru nicio valoare a parametrilor a, b, c.

5p **c)** Să se arate că, dacă toate rădăcinile polinomului f sunt reale şi a, b, c sunt strict pozitive, atunci x_1, x_2, x_3 sunt strict pozitive.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{arctg} x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x+1)-f(x)-f\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că $g(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{1+1+1^2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+2+2^2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+3+3^2}+...+\operatorname{arctg}\frac{1}{1+n+n^2}\right)$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1 e^{-x}x^n\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n=nI_{n-1}-\frac{1}{e}$, pentru orice $n\geq 2$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie a,b,c numere naturale nenule în progresie geometrică. Știind că $a+b+c$ este un număr par, să se arate că numerele a,b,c sunt pare.

5p **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+3x+2.$ Să se arate că $f(a)+f(a+1)\geq 0,$ oricare ar fi $a\in\mathbb{R}.$

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $\log_2 x+\log_4 x>3$.

5p **4.** Să se determine numerele naturale $n,$ $n\geq 2$, pentru care $C_n^1+C_n^2=120$.

5p **5.** Să se arate că unghiul vectorilor $\vec{u}=2\vec{i}-a\vec{j}$ și $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$ este obtuz dacă și numai dacă $a>2.$

5p **6.** Fie ABC un triunghi cu $\sin A=\frac{1}{2},$ $\sin B=1$ și $BC=4.$ Să se calculeze aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru orice matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se notează $tr(A)=a+d$.

5p **a)** Să se verifice că $A^2 - tr(A)\cdot A + (\det A)\cdot I_2 = 0_2$.

5p **b)** Să se demonstreze că, dacă $tr(A)=0$, atunci $A^2B=BA^2$, pentru orice matrice $B\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **c)** Să se arate că dacă $tr(A)\neq 0$, $B\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $A^2B=BA^2$, atunci $AB=BA$.

2. Fie $a,b\in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = X^4 - 6X^3 + 13X^2 + aX + b\in \mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se calculeze suma pătratelor celor 4 rădăcini complexe ale polinomului *f*.

5p **b)** Să se determine a,b astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $(X-1)(X-3)$.

5p **c)** Să se determine a,b astfel încât polinomul f să aibă două rădăcini duble.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie mulţimea $A = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3, ..., 2009\}$ şi funcţia $f : A \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + ... + \frac{1}{x-2009}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcţiei f.

5p **b)** Ştiind că $a \in \mathbb{R}^*$, să se determine numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $f(x) = a$.

5p **c)** Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcţiei f.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

5p **a)** Să se arate că funcţia f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se arate că funcţia f este concavă pe intervalul $[0, \infty)$.

5p **c)** Să se arate că şirul $(f(n))_{n \geq 1}$ este convergent.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $3!$, $\sqrt[3]{100}$, $\log_2 32$.

5p **2.** Să se arate că $x^2+3xy+4y^2 \geq 0$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin 2x = \cos x$.

5p **4.** Să se calculeze $A_5^3 - 4C_6^2$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele A,B,C astfel încât $A(1,3), B(2,5)$ şi $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$. Să se determine coordonatele punctului C.

5p **6.** Fie ABC un triunghi care are $BC = 8$ şi $\cos A = \frac{3}{5}$. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se arate că $\det\left(A \cdot A^t\right) \geq 0$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $A \cdot A^t = A^t \cdot A$, atunci $(a-d)(b-c)=0$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $\left(A - A^t\right)^{2009} = A - A^t$, atunci $|b-c| \in \{0,1\}$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$.

5p **a)** Să se rezolve în $\mathbb{Z}_7$ ecuația $\hat{2}x=\hat{3}$.

5p **b)** Să se arate că polinomul $p=\hat{2}X^2+\hat{4} \in \mathbb{Z}_7[X]$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_7$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția $f:\mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7$, $f(x)=\hat{2}x$ este un automorfism al grupului $(\mathbb{Z}_7,+)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(f(x+1)-f(x)\right)$.

5p **c)** Să se rezolve inecuația $f(x)<x-\dfrac{x^3}{3},\ x\in\mathbb{R}$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 x(1+x^2)f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^x t^4 f(t)dt$ este strict crescătoare.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, are loc relația $\int_1^a f(x)dx<\dfrac{1}{4}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z + 2\overline{z} = 3 + i$. Să se calculeze modulul numărului z.

5p **2.** Să se dea un exemplu de ecuație de gradul al doilea cu coeficienți întregi care are o soluție egală cu $\sqrt{3}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_x 2 + \log_{\sqrt{x}} 2 = 9$.

5p **4.** Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ care conțin cel puțin un număr par.

5p **5.** Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc egalitatea $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$.

5p **6.** Știind că $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\sin a = \frac{3}{5}$, să se calculeze tg a.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+y-z=2 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea sistemului să aibă rangul 2.

5p **b)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul să aibă soluții $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ care verifică relația $x_0+y_0+z_0=4$.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să aibă o soluție unică $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{Z}^3$.

2. Fie $p\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=X^4-4X+p\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se determine p astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $X+1$.

5p **b)** Să se determine p astfel încât polinomul f să aibă o rădăcină reală dublă.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $p\in\mathbb{R}$, polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ se defineşte funcția $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - nx - 1$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, funcția f_n este convexă.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ecuația $f_n(x) = 0$ are soluție unică.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$, unde x_n este unica soluție a ecuației $f_n(x) = 0$.

2. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$, $g(x) = \int_{-x}^{x} f(t) \cos t \, dt$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

5p **b)** Să se studieze monotonia funcției g pe intervalul $[0, \pi]$.

5p **c)** Să se calculeze $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

5p **2.** Fie f o funcție de gradul întâi. Să se arate că funcția $f \circ f$ este strict crescătoare.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 9^x = \frac{4}{9}$.

5p **4.** Câte funcții $f:\{1,2,3,...,10\} \to \{0,1\}$ au proprietatea că $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(10)=2$?

5p **5.** Se consideră punctele $M(1,2), N(2,5)$ și $P(3,m)$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 5$.

5p **6.** Să se determine cel mai mare element al mulțimii $\{\cos 1, \cos 2, \cos 3\}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\det(AA^t+xB)$.

5p **a)** Să se calculeze AA^t.

5p **b)** Să se arate că $f(0)\geq 0$.

5p **c)** Să se arate că există $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=mx+n$, pentru oricare $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră mulțimea de numere complexe $G=\left\{\cos q\pi + i\sin q\pi \mid q\in\mathbb{Q}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\in G$.

5p **b)** Să se arate că G este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea numerelor complexe.

5p **c)** Să se arate că polinomul $f=X^6-1\in\mathbb{C}[X]$ are toate rădăcinile în G.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2+2x+1}-\sqrt[3]{x^3-x+1}$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(1)+f(2)+...+f(n)}{n}\right)^n$.

2. Se consideră funcțiile $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\int_{\frac{1}{e}}^{x} t^n \ln t\,dt,\ \ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $f_1(e)$.

5p **b)** Să se arate că funcțiile f_n sunt descrescătoare pe intervalul $(0,1)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1)$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că $\sqrt{6+4\sqrt{2}} \in \left\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in \mathbb{Z}\right\}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|1+x| = 1-x$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[6]{x^2-2x+1} = \sqrt[3]{3-x}$.

5p **4.** Să se arate că 11 divide numărul $C_{11}^1 + C_{11}^2 + ... + C_{11}^{10}$.

5p **5.** Fie ABC un triunghi și G centrul său de greutate. Știind că $A(1,1), B(5,2)$ și $G(3,4)$, să se calculeze coordonatele punctului C.

5p **6.** Fie $a\in\mathbb{R}$ cu $\operatorname{tg} a = \frac{2}{5}$. Să se calculeze $|\sin a|$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se demonstreze că $(I_2 + A)^2 = I_2 + A$.

5p **b)** Să se demonstreze că mulțimea $\{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^3 = A,\ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Fie $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3,\ a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ și polinomul $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$.

5p **a)** Să se arate că $f(1) + f(-1)$ este număr par.

5p **b)** Să se arate că, dacă $f(2)$ și $f(3)$ sunt numere impare, atunci polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.

5p **c)** Să se arate că polinomul $g = X^3 - X + 3a + 1,\ a \in \mathbb{Z}$, nu poate fi descompus în produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x+x^3-x^2+x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se arate că funcția f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{\ln x}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1 \dfrac{x^n}{x^2+3x+2}dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_{n+2}+3I_{n+1}+2I_n=\dfrac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.