Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $\log_2 500$.

5p **2.** Se consideră ecuația $x^2 - 2x + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$, care are rădăcinile reale x_1 şi x_2. Ştiind că $|x_1 - x_2| = 1$, să se determine m.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{1-x} = 1 + x$.

5p **4.** Să se calculeze $C_{16}^0 + C_{16}^2 + C_{16}^4 + ... + C_{16}^{16}$.

5p **5.** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ ştiind că dreptele $x + y = 1$ şi $3x - ay = 2$ sunt paralele.

5p **6.** Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a + b = \frac{\pi}{2}$. Să se arate că $\sin 2a + \sin 2b = 2\cos(a - b)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $m \in \mathbb{R}$ şi punctele $A(m,1)$, $B(1-m,2)$, $C(2m+1, 2m+1)$. Se consideră matricea

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \\ 2m+1 & 2m+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5p **a)** Să se calculeze $\det(M)$.

5p **b)** Să se arate că punctele *A*, *B*, *C* sunt coliniare, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că aria triunghiului *ABC* este mai mare sau egală cu $\frac{15}{32}$.

2. Fie mulțimea de matrice $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \, a,b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

5p **a)** Să se dea un exemplu de matrice nenulă din mulțimea *A* care are determinantul $\hat{0}$.

5p **b)** Să se arate că există o matrice nenulă $M \in A$ astfel încât $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x)=(x-1)e^{-\frac{1}{x}}$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că funcția admite două puncte de extrem.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:[0;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_0^x t^3\sqrt{t^2+1}\,dt$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se calculeze $f(1)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^5}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se verifice că numărul $1+i$ este rădăcină a ecuației $z^4+4=0$.

5p **2.** Să se arate că vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+9$ se află pe dreapta de ecuație $x+y=7$.

5p **3.** Fie $f:\{1,2,3\}\to\{4,5,6\}$ o funcție injectivă. Să se arate că $f(1)+f(2)+f(3)=15$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă ambele cifre impare.

5p **5.** Se consideră punctele $A(1,0), B(2,3)$ şi $C(-1,4)$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Fie $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $\sin a=\frac{1}{4}$. Să se calculeze $\sin 3a$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare cu coeficienți reali $\begin{cases} x+ay+(b+c)z=0 \\ x+by+(c+a)z=0 \\ x+cy+(a+b)z=0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $a,b,c\in\mathbb{R}.$, sistemul admite soluții nenule.

5p **c)** Să se rezolve sistemul, știind că $a\neq b$ şi că $(1,1,1)$ este soluție a sistemului.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix} \middle| x,y\in\mathbb{R}, x^2+y^2\neq 0\right\}$.

5p **a)** Să se demonstreze că G este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

5p **b)** Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

5p **c)** Să se arate că funcția $f:(\mathbb{C}^*,\cdot)\to(G,\cdot)$ cu $f(x+iy)=\begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ este izomorfism de grupuri.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, definit prin $a_0 = \sqrt{3}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

5p **a)** Să se arate că $(a_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător.

5p **b)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}$.

2. Fie funcția $f : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to (0, \infty)$, $f(x) = \int_0^x \dfrac{(\sin t + \cos t)\sin t}{\cos^2 t}\, dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **c)** Să se calculze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)}{x^2}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\sqrt[3]{3}$ aparține intervalului $\left(\sqrt{2}, \log_2 5\right)$.

5p **2.** Să se determine valorile reale ale lui m știind că $x^2 + 3x + m \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$.

5p **4.** Într-o urnă sunt 49 de bile, inscripționate cu numerele de la 1 la 49. Să se calculeze probabilitatea ca, extrăgând o bilă din urnă, aceasta să aibă scris pe ea un pătrat perfect.

5p **5.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{v} = m\vec{i} + 4\vec{j}$ sunt perpendiculari.

5p **6.** Să se arate că $\operatorname{tg}1^\circ \cdot \operatorname{tg}2^\circ \cdot \operatorname{tg}3^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}89^\circ = 1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sistemul de ecuaţii liniare $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+(m^2-m-1)y+(m+1)z=2 \\ 2x+(m^2-m-2)y+2(m+1)z=3 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se demonstreze că sistemul are soluţie unică dacă şi numai dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

5p **b)** Să se arate că pentru $m\in\{0,1\}$ sistemul este incompatibil.

5p **c)** Să se arate că dacă $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ este soluţie a sistemului, atunci $x_0-y_0+2009\cdot z_0=1$.

2. Se consideră mulţimile $H=\{a^2 \mid a\in\mathbb{Z}_7\}$ şi $G=\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{Z}_7, a\neq\hat{0} \text{ sau } b\neq\hat{0}\right\}$.

5p **a)** Să se determine elementele mulţimii H.

5p **b)** Fie $x,y\in H$ astfel încât $x+y=\hat{0}$. Să se arate că $x=y=\hat{0}$.

5p **c)** Să se arate că G este grup abelian în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=x\sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}$.

5p **a)** Să se arate că dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c)** Să se studieze derivabilitatea funcției *f*.

2. Se consideră funcțiile $f_n:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\frac{1}{\cos^n x+\sin^n x}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{f_1(x)}dx$.

5p **b)** Să se arate că, dacă F este o primitivă a funcției f_4, atunci $F''(x)=\left(f_4(x)\right)^2\sin 4x,\ \forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\, f_1(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\, f_1(x)dx=\frac{\pi-1}{4}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie $z\in\mathbb{C}$. Să se arate că dacă $2z+3\bar{z}\in\mathbb{R}$, atunci $z\in\mathbb{R}$.

5p **2.** Să se determine funcția de gradul al doilea al cărei grafic conține punctele $(0,4),(1,-2)$ și $(-1,1)$.

5p **3.** Se se arate că funcția $f:(0,\infty)\to(1,3)$, $f(x)=\dfrac{x+3}{x+1}$ este bijectivă.

5p **4.** Să se determine numerele naturale n, $n\geq 5$, astfel încât $C_n^3=C_n^5$.

5p **5.** Se consideră punctele A,B,C,D astfel încât $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Să se arate că $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$.

5p **6.** Fie $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $a-b=\pi$. Să se arate că are loc relația $\cos a\cdot\cos b\leq 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 2x-y+z=m \\ nx+y-2z=4 \end{cases}$, unde $m,n\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine *m* și *n* pentru care sistemul admite soluția $x_0=2,\ y_0=2,\ z_0=1$.

5p **b)** Să se determine $n\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Să se determine *m* și *n* pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \middle|\ a,b\in\mathbb{Z}_3\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul de elemente ale mulțimii *G*.

5p **b)** Să se arate că *G* este grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$.

5p **c)** Să se arate că $X^3=I_3$, oricare ar fi $X\in G$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x)=\frac{e^x}{x}$.

5p **a)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} n^2\left(f(n)-f(n+1)\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\int_0^x e^{-t}(t^2-3t+2)dt$.

5p **a)** Să se arate că $f(1)>0$.

5p **b)** Să se arate că funcția f admite două puncte de extrem.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x^2}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie $z \in \mathbb{C}$. Să se arate că numărul $i\left(z-\overline{z}\right)$ este real.

5p **2.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+(m+1)x+m$ este tangentă la axa Ox.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1}=5-x$.

5p **4.** Câți termeni ai dezvoltării $(1+2)^7$ sunt divizibili cu 14?

5p **5.** Fie ABC un triunghi echilateral de arie $\sqrt{3}$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Fie $a,b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a+b=\frac{3\pi}{2}$. Să se arate că $\sin 2a - \sin 2b = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie A matricea coeficienţilor sistemului $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x - y + mz = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită soluţii nenule.

5p **c)** Să se arate că, dacă $m = 0$, atunci expresia $\dfrac{z_0^2 + y_0^2 + x_0^2}{z_0^2 - y_0^2 - x_0^2}$ este constantă, pentru orice soluţie nenulă (x_0, y_0, z_0) a sistemului.

2. Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = X^4 - 4X^3 + 6X^2 + aX + b$, care are rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3, x_4.

5p **a)** Să se determine a şi b ştiind că f are rădăcina i.

5p **b)** Să se calculeze $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2$.

5p **c)** Să se determine valorile reale ale numerelor a şi b ştiind că toate rădăcinile polinomului f sunt reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele la graficul funcției f.

5p **b)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(f(x+1)-f(x)\right)$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ definit prin $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{2n}\, t\,dt,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{2n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se arate că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent la 0.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\frac{1+3i}{1-3i}+\frac{1-3i}{1+3i}$ este real.

5p **2.** Numere reale *a* şi *b* au suma 5 şi produsul 2. Să se calculeze valoarea sumei $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

5p **4.** Câte elemente ale mulțimii $A=\left\{x \mid x=C_7^k,\ k\in\mathbb{N},\ k\le 7\right\}$ sunt divizibile cu 7?

5p **5.** Fie *ABCD* un dreptunghi cu *AB* = 3 şi *AD* = 6. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

5p **6.** Să se calculeze suma $\cos1^\circ+\cos2^\circ+\cos3^\circ+...+\cos179^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + ay + (a+b)z = a+b \\ x + a^2 y + (a^2+b^2)z = a^2+b^2 \\ x + a^3 y + (a^3+b^3)z = a^3+b^3 \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil determinat.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice valori rele ale parametrilor *a* şi *b* sistemul are soluție.

2. Se consideră polinomul $f = \hat{2}X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_4[X]$.

5p **a)** Să se determine gradul polinomului f^2.

5p **b)** Să se arate că polinomul f este element inversabil al inelului $(\mathbb{Z}_4[X], +, \cdot)$.

5p **c)** Să se determine toate polinoamele $g \in \mathbb{Z}_4[X]$ de gradul 1 cu proprietatea că $g^2 = \hat{1}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{2}f(2)f(3)\ldots f(n)\right)^{n^2}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\ge1},\ I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se arate că $nI_n=(n-1)I_{n-2},\ \forall n\ge 3$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^n x\,dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie $z \in \mathbb{C}$ o rădăcină de ordin 3 a unității, diferită de 1. Să se calculeze $1+z+z^2$.

5p **2.** Să se determine soluțiile întregi ale inecuației $x^2+x-6 \le 0$.

5p **3.** Fie funcția $f:(1,\infty) \to (2,\infty)$, $f(x)=x^2+1$. Să se arate că funcția f este bijectivă.

5p **4.** Câte numere naturale de la 1 la 100 sunt divizibile cu 6 și cu 8?

5p **5.** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\overrightarrow{v_1}=a\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ şi $\overrightarrow{v_2}=3\vec{i}+5\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Triunghiul *ABC* are laturile $AB=3$, $BC=5$ şi $AC=7$. Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul *ABC*.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, care are toate elementele egale cu 1.

5p **a)** Să se demonstreze că $A^2 = 3A$.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(I_3 + A^3\right)$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este o matrice cu proprietatea $AB = BA$, atunci suma elementelor de pe fiecare linie şi de pe fiecare coloană ale lui B este aceeaşi.

2. Fie $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $\mathbb{Q}(\varepsilon) = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

5p **a)** Să se arate că $\varepsilon^2 \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$.

5p **b)** Să se demonstreze că inversul oricărui element nenul din $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ aparține mulțimii $\mathbb{Q}(\varepsilon)$.

5p **c)** Să se arate că mulțimea $M = \{a^2 - ab + b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu înmulțirea.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

5p **a)** Să se arate că funcția *f* este strict crescătoare.

5p **b)** Să se studieze convergența şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1=1$ şi $x_{n+1}=f(x_n),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x+1)-f(x)\leq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f,g:(0,3)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x}{3-x}$ şi $g(x)=\dfrac{\ln(3-x)}{x},\ \forall x\in(0,3)$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_1^e (3-x)f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 g(x)dx$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{t\searrow 0}\int_t^1 f(x)dx=+\infty$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $a=\lg 2-\lg 20$, $b=C_3^2-C_4^2$ şi $c=-\sqrt[3]{4\sqrt{4}}$.

5p **2.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ ştiind că distanța de la vârful parabolei de ecuație $y=x^2+2x+a$ la axa Ox este egală cu 1.

5p **3.** Numerele reale x şi y verifică egalitatea $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\frac{\pi}{2}$. Să se arate că $x\cdot y=1$.

5p **4.** Să se arate că numărul A_n^3, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ este divizibil cu 3.

5p **5.** Punctele E,F,G,H sunt mijloacele laturilor $[BC]$, $[DA]$, $[AB]$, respectiv $[CD]$ ale patrulaterului $ABCD$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{CA}$.

5p **6.** Să se calculeze $\operatorname{tg} x$, ştiind că $x\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ şi $\sin 2x=-\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $m \in \mathbb{R}$ şi $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & m & -1 \\ 3m+4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matrice *A* să fie inversabilă.

5p **c)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^{-1} = A^*$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ şi polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_3$, $f = X^3 - X$, $g = X^3 + \hat{2}X + \hat{2}$.

5p **a)** Să se determine rădăcinile din $\mathbb{Z}_3$ ale polinomului *f*.

5p **b)** Să se arate că polinomul *g* este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

5p **c)** Să se determine toate polinoamele $h \in \mathbb{Z}_3[X]$ de gradul trei, astfel încât $h(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}_3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-f(x)}{x^3}$.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=(x-1)f(x)$ admite exact un punct de extrem.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\ge 1}, I_n=\int_0^1 x^n \sin x\, dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că şirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este convergent.

5p **c)** Să se demonstreze că $I_{2n}+2n(2n-1)I_{2n-2}=2n\sin 1-\cos 1,\ \forall n\ge 2$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numerele complexe z care verifică relația $z+3i=6\cdot\overline{z}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|1-2x|=|x+4|$.

5p **3.** Să se determine imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+4x^2}$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor strict monotone $f:\{1,2,3\}\to\{5,6,7,8\}$.

5p **5.** Să se demonstreze că pentru orice punct M din planul paralelogramului $ABCD$ are loc egalitatea $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

5p **6.** Fie a și b numere reale, astfel încât $a+b=\dfrac{\pi}{3}$. Să se arate că $\sin 2a-\sin 2b-\sin(a-b)=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x_1 - x_2 = a \\ x_3 - x_4 = b \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice valori ale lui *a* şi *b*, sistemul este compatibil.

5p **b)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită o soluție (x_1, x_2, x_3, x_4) cu proprietatea că x_1, x_2, x_3, x_4 şi $x_1 + x_2$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă sistemul are o soluție cu toate componentele strict pozitive, atunci $a + b < 1$.

2. Fie polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 5X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ şi $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale.

5p **a)** Să se calculeze $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$.

5p **b)** Să se arate că polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.

5p **c)** Să se calculeze $x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $a > 0$ se consideră funcția $f_a : (0;\infty) \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = (x+a)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

5p **a)** Să se calculeze $f_a'(x)$, $x > 0$.

5p **b)** Să se determine a astfel încât funcția f_a să fie convexă.

5p **c)** Să se arate că graficul funcției f_a admite asimptotă spre $+\infty$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\ge 1}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se arate că $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, $\forall n \ge 3$.

5p **c)** Să se demonstreze că șirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este convergent.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu rația 3. Știind că suma primilor 10 termeni ai progresiei este 150, să se determine a_1.

5p **2.** Să se determine toate perechile (a,b) de numere reale pentru care $a^2+b^2=a+b=2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg x+\lg(9-2x)=1$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{1,2,3,...,100\}$, acesta să **nu** fie divizibil cu 7.

5p **5.** Se consideră punctele $A(0,2)$, $B(1,-1)$ și $C(5,1)$. Să se determine ecuația dreptei duse din vârful *A*, perpendiculară pe dreapta *BC*.

5p **6.** Să se arate că $1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie M mulțimea matricelor de ordin 3 cu elemente reale având proprietatea că suma elementelor fiecărei linii este 0.

5p **a)** Să se arate că, dacă $A, B \in M$, atunci $A + B \in M$.

5p **b)** Să se arate că orice matrice din M este neinversabilă.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $A \in M$, atunci $A^2 \in M$.

2. Se consideră inelele $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ și $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] = \left\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că, dacă $x \in \mathbb{R}$ și $x^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, atunci $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

5p **b)** Să se arate că $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \cap \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] = \mathbb{Z}$.

5p **c)** Să se demonstreze că nu există morfisme de inele de la $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ la $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f_n:(0;\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=x^n+\ln x,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției f_1.

5p **b)** Să se demonstreze că funcțiile $g_n:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ g_n(x)=f_n(x)+f_n\left(\frac{1}{x}\right)$ sunt convexe.

5p **c)** Admitem că ecuația $f_n(x)=2^n$ are soluția unică x_n. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\ge1}$ converge la 2.

2. Fie $a\in[0,1]$ şi $I_n=\int_0^a\frac{t^n}{t+1}dt,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_2.

5p **b)** Să se demonstreze că $I_n+I_{n-1}=\frac{a^n}{n},\ \forall n\ge2$.

5p **c)** Să se arate că $\lim_{n\to\infty} I_n=0$.