EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\log_7 2009 - \log_7 287 - 1$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$. Să se arate că funcţia f este pară.

5p **3.** Să se arate că valoarea maximă a funcţiei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - x^4$ este $f(0)$.

5p **4.** Să se determine $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, astfel încât $3C_n^1 + 2C_n^2 = 8$.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC şi punctele A', B', C' astfel încât $\overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{BA'}$, $\overrightarrow{B'C} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{C'A} = 3\overrightarrow{BC'}$. Să se arate că dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente.

5p **6.** Să se determine ecuaţia medianei corespunzătoare laturii BC a triunghiului ABC, ştiind că $A(2,2)$ şi ecuaţiile medianelor duse din B şi C sunt $2x + y - 2 = 0$, respectiv $x - y + 2 = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul de ordin $n \geq 2$, $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

5p **b)** Să se verifice că $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$, $\forall n \geq 4$.

5p **c)** Să se arate că $D_n = n+1$, $\forall n \geq 2$.

2. Un grup $(G, \cdot)$, cu elementul neutru e, are proprietatea (p) dacă $x^2 = e$, $\forall x \in G$.

5p **a)** Să se verifice că mulțimea $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, împreună cu legea de compoziție dată de $(a,b) \cdot (c,d) = (a+c,\, b+d), \forall a,b,c,d \in \mathbb{Z}_2$ este un grup care are proprietatea (p).

5p **b)** Să se arate că dacă un grup G are proprietatea (p), atunci $(xy)^2 = x^2 y^2$, $\forall x, y \in G$.

5p **c)** Să se arate că orice grup care are proprietatea (p) este comutativ.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln(1+x)$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să arate că $f(x)>0, \forall x\in(0,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

2. Se consideră funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_1^2 t^x dt$.

5p **a)** Să se verifice că $1+(x+1)F(x)=2^{x+1}, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to -1} F(x)$.

5p **c)** Să se arate că există o funcție continuă $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, astfel încât $F(x)=1+\int_0^x f(y)dy, \forall x\in(-1,\infty)$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{100}$ este real.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-\frac{1}{x}$. Să se arate că funcția f este impară.

5p **3.** Să se determine imaginea funcției $f:[1,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x$.

5p **4.** Să se calculeze $C_{2009}^0\cdot 5^{2009}-C_{2009}^1\cdot 5^{2008}\cdot 4+C_{2009}^2\cdot 5^{2007}\cdot 4^2-\ldots-C_{2009}^{2009}\cdot 4^{2009}$.

5p **5.** Se consideră punctul $A(1,2)$ și dreapta de ecuație $d:\ 4x-2y+5=0$. Să se determine ecuația perpendicularei duse din punctul A pe dreapta d.

5p **6.** Să se calculeze $\sin 75^\circ\cdot\cos 15^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se rezolve ecuația $\det(I_3+xA^2)=0,\ x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine o matrice $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea $B^2=A$.

5p **c)** Să se arate că $\forall C\in M_3(\mathbb{R}),\ \forall x\in\mathbb{R},\ \det(C+xA)\det(C-xA)\le(\det C)^2$.

2. Se consideră polinomul $p=X^3-X+m$ cu $m\in\mathbb{R}$ și cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Știind că $m=-6$, să se determine x_1,x_2,x_3.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^4+x_2^4+x_3^4$.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul p are toate rădăcinile întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

5p **a)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_n(x)=|\sin nx|$ şi numărul $I_n=\int_{\pi}^{2\pi}\dfrac{f_n(x)}{x}dx$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\pi} f_2(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $I_n\le \ln 2$.

5p **c)** Să se arate că $I_n\ge \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}\right)$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $|5-12i|-|12+5i|$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x^4$. Să se calculeze $(f\circ f\circ f\circ f)(1)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x+4^x=20$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A=\{0,5,10,...,2010\}$, acesta să fie divizibil cu 25.

5p **5.** Se consideră un triunghi *ABC*, cu lungimile laturilor $AB=c, AC=b$ şi un punct *D* astfel încât $\overrightarrow{AD}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$. Să se arate că semidreapta [*AD* este bisectoarea unghiului BAC.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ astfel încât $\cos 2\alpha=\frac{1}{2}$. Să se calculeze $\cos\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se asociază fiecărui punct $A(x, y)$ punctul $A_M(x', y')$, unde $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

5p **a)** Știind că $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$ și că $A(-1,1)$, să se determine coordonatele punctului A_M.

5p **b)** Știind că $a = 1, b = 2, c = 2, d = 4$, să se arate că toate punctele A_M se află pe dreapta $y = 2x$.

5p **c)** Fie A, B, C trei puncte în plan. Dacă se notează cu S și S_M ariile triunghiurilor ABC, respectiv $A_M B_M C_M$, atunci $S_M = S \cdot |\det M|$.

2. Se consideră mulțimea $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ \hat{0} & a & d \\ \hat{0} & \hat{0} & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2 \right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii A.

5p **b)** Să se arate că mulțimea A este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_2)$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^2 = X$, cu $X \in A$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi funcția $f : \{-1,1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + x + a}{x^2 - 1}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)^x$.

5p **b)** Să se determine valoarea numărului *a* ştiind că 3 este punct de extrem local al funcției *f*.

5p **c)** Să se determine valoarea numărului *a* ştiind că graficul funcției *f* are exact o asimptotă verticală.

2. Se consideră funcția $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$ şi, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, se defineşte funcția $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)dt$.

5p **a)** Să se arate că $f_1^2(x) = 2 f_2(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x f_n(x) + 1}{f_{n+1}(x) + 2}$.

5p **c)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $g : [0, \pi] \to [0, \pi]$, $g(x) = f_1(x) \sin x$ în jurul axei Ox.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2+3z+4=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2m+2$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât graficul funcției *f* să nu intersecteze axa *Ox*.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2-x}+\sqrt[3]{x-2}=0$.

5p **4.** Să se arate că $C_{a+b}^{a}=C_{a+b}^{b}$, pentru oricare $a,b\in\mathbb{N}^*$.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctele $A(3,3)$, $B(2,4)$ și $C(2m,1-m)$ să fie coliniare.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ astfel încât $\cos 2\alpha=-\frac{1}{2}$. Să se calculeze $\sin\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det A$.

5p **b)** Să se verifice relația $A(A^2+6I_3)=O_3$.

5p **c)** Să se arate că $\det(I_3+xA^2)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră $a,b\in\mathbb{Z}$ și polinomul $p=X^3+aX^2+X+b$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Știind că $a=b=1$, să se afle rădăcinile polinomului p.

5p **b)** Să se determine a și b, știind că polinomul p are rădăcina dublă 1.

5p **c)** În cazul $b=1$, să se determine valorile lui a pentru care polinomul p are o rădăcină rațională.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{2+x}{2-x}$.

5p **a)** Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se studieze monotonia funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=\int_1^2\left(\dfrac{t}{x}-e^x\right)^2dx$ și numerele $A=\int_1^2\dfrac{1}{x^2}dx$, $B=\int_1^2\dfrac{e^x}{x}dx$.

5p **a)** Să se arate că $f(t)=At^2-2Bt+\dfrac{e^4-e^2}{2}$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $f(2B-t)=f(2B+t), \forall t\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\left(\int_1^2\dfrac{e^x}{x}dx\right)^2\le\left(\int_1^2 e^{2x}dx\right)\left(\int_1^2\dfrac{1}{x^2}dx\right)$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $a=-\sqrt[3]{27}, b=\log_2 \frac{1}{16}$ și $c=-2$.

5p **2.** Să se determine valorile parametrului real m știind că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx-2m$ se află situată deasupra axei Ox.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(\sqrt{x^2+x-2}\right)=1$.

5p **4.** Se consideră dreptele paralele d_1, d_2 și punctele distincte $A,B,C\in d_1$, $M,N,P,Q\in d_2$. Să se determine numărul triunghiurilor care au toate vârfurile în mulțimea celor şapte puncte date.

5p **5.** Să se determine coordonatele simetricului punctului $A(-3;2)$ față de mijlocul segmentului $[BC]$, unde $B(1;-4)$ și $C(-5,-1)$.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului ABC în care $AM=BC=4$, unde M este mijlocul lui (BC), iar $m(\sphericalangle AMC)=150^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $M_x = \frac{x}{3}A + \frac{1}{3x^2}B$, cu $x \in \mathbb{R}^*$.

5p **a)** Să se calculeze produsul AB.

5p **b)** Să se arate că $M_x M_y = M_{xy}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice x real nenul, $\det(M_x) \neq 0$.

2. Se consideră polinomul $p = X^4 - aX^3 - aX + 1$, cu $a \in \mathbb{R}$ şi cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

5p **a)** Să se verifice că $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.

5p **b)** Să se arate că polinomul p nu este divizibil cu $X^2 - 1$ pentru nicio valoare a lui a.

5p **c)** Să se arate că dacă $a = \frac{1}{2}$, atunci toate rădăcinile polinomului p au modulul 1.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$ şi funcția $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^{\alpha} - \alpha x$.

5p **a)** Să se studieze monotonia funcției *f*.

5p **b)** Să se demonstreze că $(1+x)^{\alpha} > 1 + \alpha x, \forall x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}, \forall \alpha \in (1, \infty)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $2f(x+y) \le f(2x) + f(2y), \forall x, y \in [0, \infty)$.

2. Fie funcția $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^3 f^2(x)[x]dx$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

5p **c)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n \ge 1}$, dat de $a_n = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n) - \int_0^n f(x)dx$, este convergent.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se verifice dacă numărul $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ aparține mulțimii $\left\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

5p **2.** Se consideră ecuația $x^2-3x+1=0$, cu rădăcinile x_1 și x_2. Să se arate că $x_1^2+x_2^2\in\mathbb{N}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}$.

5p **4.** Să se arate că oricare ar fi n natural, $n\geq 1$, are loc egalitatea $C_{2n}^{n}=2\cdot C_{2n-1}^{n}$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+4\vec{j}$. Să se calculeze modulul vectorului $\vec{u}+\vec{v}$.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, astfel încât $\sin\alpha=\frac{3}{5}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1+a^2 & ab & ac \\ ba & 1+b^2 & bc \\ ca & cb & 1+c^2 \end{pmatrix}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$ şi A^* adjuncta sa.

5p **a)** Să se calculeze determinantul matricei A.

5p **b)** Să se verifice că $\det(A^*)=(\det A)^2$.

5p **c)** Să se arate că matricea $A-I_3$ are rangul cel mult 1.

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup. Pentru fiecare element $a\in G$ se defineşte funcția $f_a:G\to G,\ f_a(x)=ax, \forall x\in G.$

5p **a)** Să se arate că f_a este bijectivă, pentru orice $a\in G.$

5p **b)** Să se arate că $f_a\circ f_b=f_{ab},\ \forall a,b\in G$.

5p **c)** Fie $\mathcal{F}(G)=\{f_a:G\to G\mid a\in G\}$. Să se arate că $\mathcal{F}(G)$ împreună cu operația de compunere a funcțiilor formează un grup.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln x$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f nu admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **b)** Să se arate că ecuația $f(x)=0$ are o soluție unică $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{xe^x-1}{x-x_0}=f'(x_0)$, unde x_0 este numărul definit la punctul **b)**.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, definit prin $I_n=\int_0^1\frac{\ln\left(x^n+1\right)}{x+1}dx$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine I_1.

5p **b)** Să se arate că şirul I_n este strict descrescător.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$ (se consideră cunoscut faptul că $\ln(1+t)\leq t,\ \forall t\in(-1,\infty)$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ de rație 2 și cu $a_3 + a_4 = 8$. Să se determine a_1.

5p **2.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x$. Să se calculeze $f(-1) + f(-2) + f(-3) + ... + f(-10)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 2^x = 56$.

5p **4.** Să se calculeze $A_4^3 - A_3^2 - C_4^2$.

5p **5.** Fie ABC un triunghi și G centrul său de greutate. Se consideră punctul M definit prin $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC}$. Să se arate că dreptele GM și AC sunt paralele.

5p **6.** Fie $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\sin\alpha = \frac{3}{4}$. Să se calculeze $\mathrm{tg}\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x - y - mz = 1 \\ mx + y + mz = 1 - m \\ mx + 3y + 3z = -1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze determinatul matricei sistemului.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $m \in \mathbb{R}$, matricea sistemului are rangul cel puțin egal cu 2.

5p **c)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

2. Se consideră $\alpha > 0$ un număr real şi mulțimea $G_\alpha = (\alpha, \infty)$. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x * y = 3xy - 6(x + y) + 7\alpha$.

5p **a)** Să se arate că pentru $\alpha = 2$, cuplul $(G_2, *)$ este grup abelian.

5p **b)** Să se arate că grupurile $(G_2, *)$ şi $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sunt izomorfe, prin funcția $f : G_2 \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 3x - 6$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $\alpha \geq 2$, mulțimea G_α este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația „$*$”.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $xf(x)=e^x-1, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că funcția f este continuă în $x=0$ dacă și numai dacă $f(0)=1$.

5p **c)** Să se arate că dacă funcția f este continuă în $x=0$, atunci ea este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_1^2((x-1)(2-x))^n\,dx.$

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $2(2n+1)I_n=nI_{n-1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $10^{\lg 7} - \sqrt[3]{343}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia $2x^2 - 3x + 1 \le 0$.

5p **3.** Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \log_3 2^x - x$ este injectivă.

5p **4.** Să se calculeze numărul diagonalelor unui poligon convex cu 8 laturi.

5p **5.** Fie $ABCD$ un paralelogram şi P un punct astfel ca $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PD}.$ Să se arate că $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right).$

5p **6.** Fie $a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $a + b = \frac{\pi}{4}.$ Să se arate că $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = 1.$

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x-3y+4z-5t=-1 \\ x+9y+mz+t=3 \\ 5x-6y+10z+nt=p \end{cases}$, $m,n,p\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine p astfel încât sistemul să admită o soluție (x_0,y_0,z_0,t_0) cu $z_0=t_0=0$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $m,n\in\mathbb{R}$, rangul matricei sistemului este mai mare sau egal cu 2.

5p **c)** Să se determine $m,n,p\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil, iar matricea sistemului are rangul 2.

2. Fie mulțimea $Q_0=\left\{\frac{m}{n}\mid m,n\in\mathbb{Z},\ m \text{ şi } n \text{ sunt impare}\right\}$ şi $G=Q_0\times\mathbb{Z}$. Pe G se defineşte legea de compoziție $(q_1,k_1)*(q_2,k_2)=(q_1q_2,k_1+k_2)$, $\forall q_1,q_2\in Q_0, \forall k_1,k_2\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se arate că $(G,*)$ este grup abelian.

5p **b)** Să se calculeze $(1,1)*(1,2)*...*(1,10)$.

5p **c)** Să se arate că funcția $f:G\to\mathbb{Q}^*$, $f((q,k))=q\cdot 2^k$ este un izomorfism între grupurile $(G,*)$ şi $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

5p **a)** Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x(2\operatorname{arctg} f(x)-\pi)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{3+\cos x}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$.

5p **b)** Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}\int\limits_0^x f(t)dt$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cap \left(\log_2 3, \infty\right) = \varnothing$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$. Să se determine abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției *f* cu axa Ox.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1$.

5p **4.** Să se determine $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, astfel încât C_n^3 să dividă C_{n+1}^3.

5p **5.** Fie punctele $A(1,2)$, $B(-1,3)$ și $C(0,4)$. Să se calculeze lungimea înălțimii duse din vârful A al triunghiului *ABC*.

5p **6.** Fie $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $\mathrm{tg}^2 x = 6$. Să se calculeze $\cos^2 x$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + my + 2z = 1 \\ x + (2m-1)y + 3z = 1 \\ x + my + (m-3)z = 2m-1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

5p **b)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

5p **c)** Pentru $m = 1$ să se determine soluțiile reale (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care $2x_0^2 - y_0^2 + 3z_0^2 = 14$.

2. Pe mulțimea $G = [0,1)$ se definește legea de compoziție $x * y = \{x + y\}$, unde $\{a\}$ este partea fracționară a numărului real *a*.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{2}{3} * \frac{3}{4}$.

5p **b)** Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $x * x * x = \frac{1}{2}$, $x \in G$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{3x}+2x+1$.

5p **a)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că funcția f este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(f(-1)+f(-2)+f(-3)+...+f(-n)+n^2)$.

2. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0=1$ şi $a_{n+1}=\int_0^{a_n}\sin \pi x\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze a_1.

5p **b)** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)...(1-i^{2009})$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1-x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=2x-1.$ Să se arate că funcția $f\circ g$ este descrescătoare.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $\sqrt[3]{2-x^2}\geq 1.$

5p **4.** Să se calculeze numărul funcțiilor injective $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4,5\}$ cu proprietatea că $f(1)\neq 1$.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $P(4,-1)$ și este paralelă cu dreapta $x-2y+1=0.$

5p **6.** Fie $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\sin x=\frac{1}{2}+\cos x.$ Să se calculeze $\sin 2x.$

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix}\in S_5$ şi mulțimea $A=\left\{\sigma^n \mid n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul inversiunilor lui σ.

5p **b)** Să se determine numărul elementelor mulțimii *A*.

5p **c)** Fie $\tau\in S_5$ astfel încât $\tau\sigma^2=\sigma^2\tau$. Să se arate că $\tau\sigma=\sigma\tau$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție şi mulțimea $H=\left\{T\in\mathbb{R} \mid f(x+T)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că, dacă $T\in H$, atunci $-T\in H$.

5p **b)** Să se demonstreze că *H* este subgrup al grupului $(\mathbb{R},+)$.

5p **c)** Să se determine mulțimea *H* pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\{x\}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Să se studieze monotonia funcţiei *f*.

5p **b)** Să se arate că $(x^2+1)f''(x)+xf'(x)=\sqrt{x^2+1}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se arate că graficul funcţiei f admite asimptotă spre $-\infty$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\ge 1}$, $I_n=\int_0^1 \frac{nx^n}{x^n+1}dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n=\ln 2-\int_0^1 \ln(1+x^n)dx,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.