Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul real x ştiind că numerele $x+1, 1-x$ şi 4 sunt în progresie aritmetică.

5p **2.** Să se determine punctele de intersecție a parabolei $y=x^2+5x-6$ cu axele de coordonate.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $[0,2\pi]$ ecuația $2\sin x+1=0$.

5p **4.** Fie mulțimea $M=\{1,2,3,4,5,6\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile mulțimii M, aceasta să aibă 2 elemente.

5p **5.** Punctele A, B şi G au vectorii de poziție $\overrightarrow{r_A}=4\vec{i}+7\vec{j}$, $\overrightarrow{r_B}=2\vec{i}-\vec{j}$, $\overrightarrow{r_G}=4\vec{i}+4\vec{j}$. Să se determine vectorul de poziție a punctului C astfel încât punctul G să fie centrul de greutate al triunghiului ABC.

5p **6.** Fie vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$. Dacă $|\vec{u}|=1$, $|\vec{v}|=2$ şi măsura unghiului vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ este $\frac{\pi}{3}$, să se calculeze $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(2\vec{v}-\vec{u})$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G = \left\{ M_{a,b} \mid M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se arate că $M_{a,b} \cdot M_{c,d} = M_{a+c,b+d}$, $\forall\, a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că orice matrice din G este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze, în funcție de a și b, rangul matricei $M_{a,b} - M_{a,b}^t$ ($M_{a,b}^t$ este transpusa lui $M_{a,b}$).

2. Se consideră un grup $(K, \cdot)$, unde $K = \{e, a, b, c\}$, e este elementul neutru și $a^2 = b^2 = c^2 = e$.

5p **a)** Să se rezolve în grupul K ecuația $x^3 = e$.

5p **b)** Să se arate că $ab = c$.

5p **c)** Să se arate că grupul $(K, \cdot)$ nu este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_4, +)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este continuă.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$.

5p **c)** Să se arate că funcția f este strict descrescătoare.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+\sin^2 x)$.

5p **a)** Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx$.

5p **c)** Să se calculeze derivata funcției $g:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} f(t)\,dt$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine $x>0$ ştiind că numerele x, 6 şi $x-5$ sunt în progresie geometrică .

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x-2$. Să se calculeze $f\left(2\cdot\left(f(-1)\right)\right)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

5p **4.** Să se arate că $(n!)^2$ divide $(2n)!$, pentru oricare n natural.

5p **5.** Se consideră punctele $A(3,2)$ şi $B(6,5)$. Să se determine coordonatele punctelor M şi N ştiind că acestea împart segmentul $[AB]$ în trei segmente congruente, iar ordinea punctelor este A,M,N,B.

5p **6.** Să se determine numerele naturale *a* pentru care numerele a, $a+1$ şi $a+2$ sunt lungimile laturilor unui triunghi obtuzunghic.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2 = 2A$.

5p **a)** Să se arate că matricea $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ verifică relația $B^2 = 2B$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $a+d \neq 2$, atunci $A = O_2$ sau $A = 2I_2$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a+d = 2$, atunci $\det(A) = 0$.

2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - 1$, $g = X^6 - 1$.

5p **a)** Să se arate că un cel mai mare divizor comun al polinoamelor f și g este $X^2 - 1$.

5p **b)** Să se determine numărul soluțiilor complexe distincte ale ecuației $f(x)g(x) = 0$.

5p **c)** Să se descompună polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n+\ln x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f_2 este strict crescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, ecuația $f_n(x)=0$ are exact o rădăcină reală, situată în intervalul $\left(\frac{1}{e},1\right)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{f_2(x)-1}-\frac{1}{x-1}\right)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\in(-\infty,0]\\ 1+\sin x, & x\in(0,\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $[-2\pi,2\pi]$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^{\pi} f(x)\,dx$.

5p **c)** Să se arate că , pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi} f^n(x)\,dx\le 2^n\pi$.

Ministerul Educației, Cercetării şi Inovării
Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de termen general $a_n = \dfrac{4n}{n+3}$, este crescător.

5p **2.** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a parabolelor $y = x^2 + x + 1$ şi $y = -x^2 - 2x + 6$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

5p **4.** Suma coeficienților binomiali ai dezvoltării $\left(2x^2 - 5y\right)^n$ este egală cu 32. Să se determine termenul de rang patru.

5p **5.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât dreptele $d_1: mx + 3y + 2 = 0$ şi $d_2: 2x + y - 8 = 0$ să fie concurente.

5p **6.** Fie $ABCD$ un patrulater. Să se arate că dacă $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, atunci $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimile $P=\left\{S\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid S^t=S\right\}$ şi $Q=\left\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid A^t=-A\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\in P$ şi $\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\in Q$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $A,B\in Q$, atunci $AB\in P$.

5p **c)** Să se arate că $\det(X)\geq 0$, oricare ar fi $X\in Q$.

2. Se consideră polinoamele $f=X^3+2X^2+3X+45\in\mathbb{Z}[X]$ şi $\hat{f}=X^3+X+\hat{1}\in\mathbb{Z}_2[X]$.

5p **a)** Să se arate că rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului f nu sunt toate reale.

5p **b)** Să se arate că polinomul $\hat{f}$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}_2$.

5p **c)** Să se demonstreze că polinomul f nu poate fi scris ca produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q} \\ x^3, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$.

5p **a)** Să arate că $\left|f(x)\right|\le|x|,\ \forall x\in[-1,1]$.

5p **b)** Să arate că funcția f este continuă în origine.

5p **c)** Să se arate că funcția *f* nu este derivabilă în origine.

2. Se consideră $a,b\in\mathbb{R}$ şi funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} axe^x - x, & x\le 0 \\ x\cos x + b, & x>0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se determine a şi b ştiind că funcția f este primitivă pe $\mathbb{R}$ a unei funcții.

5p **b)** Ştiind că $a=0$ şi $b=0$, să se calculeze $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $b=0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi} x^n f(x)dx=-\infty$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, de termen general $a_n = n^2 - n$, este strict monoton.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x) = x^2 + 2x + 1$ și $g(x) = x - 2009$. Să se demonstreze că, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)\geq 0.$

5p **3.** Să se rezolve în $(0,\pi)$ ecuația $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

5p **4.** Să se determine $x\in\mathbb{N}$, $x\geq 3$ știind că $C_x^{x-1} + C_{x-1}^{x-3} \leq 9$.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că dreptele $d_1:\ mx + (m+2)y - 1 = 0$ și $d_2:\ (m+2)x + 4my - 8 = 0$ sunt paralele.

5p **6.** Fie ABC un triunghi cu $\operatorname{tg} A = 2,\ \operatorname{tg} B = 3.$ Să se determine măsura unghiului C.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie mulţimea $M=\left\{\begin{pmatrix} x & 3y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x,y\in\mathbb{Z}\right\}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ şi $AY=YA$, atunci $Y\in M$.

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in M$ şi $\det(X)=0$, atunci $X=O_2$.

5p **c)** Să se arate că $A^n\in M, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^5-X^4+3X^3-X^2-2\in\mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se determine o rădăcină întreagă a polinomului *f*.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+...+x_5^2$, unde $x_1,x_2,...,x_5$ sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Să se arate că f are o singură rădăcină reală.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(-\infty,-2)\cup(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty,-2)$.

5p **b)** Să calculeze limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}, a_n = f(1)+f(2)+...+f(n)-\ln\frac{n(n+1)}{2}$.

5p **c)** Să se arate că există un punct $c\in(1,2)$ astfel încât $(c-1)f'(c)+f(c)=f(2)$.

2. Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{1+x^4}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $\frac{\pi}{4}\leq\int_0^1 f(x)dx\leq 1$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1\frac{f(x)f''(x)-\left(f'(x)\right)^2}{\left(f(x)\right)^2}dx$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine primul termen al progresiei aritmetice $a_1, a_2, 13, 17, \ldots$.

5p **2.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2\sin x$ este impară.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă suma cifelor egală cu 2.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ știind că dreptele $d_1: mx+3y-2=0$ și $d_2: 12x+2y+1=0$ sunt perpendiculare.

5p **6.** Știind că $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, să se calculeze $\sin\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax+y+z=4 \\ x+2y+3z=6 \\ 3x-y-2z=b \end{cases}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine a,b pentru care sistemul are soluția $(1,1,1)$.

5p **b)** Să se determine a,b astfel încât sistemul să fie incompatibil.

5p **c)** Să se arate că pentru orice $a\in\mathbb{Z}$ există $b\in\mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să admită soluții cu toate componentele numere întregi.

2. Se consideră mulțimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ b & c & a \end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbb{Z}_2\right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii A.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $X\in A$, $X^2=I_3$ sau $X^2=O_3$.

5p **c)** Să se determine numărul matricelor X din mulțimea A care au proprietatea $X^2=O_3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^x$.

5p **a)** Să se arate că funcţia f este bijectivă.

5p **b)** Să se arate că $f(x)\ge 2x+1, \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $f(x)\ge mx+1, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci $m=2$.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin^3 x\cos x$ şi F o primitivă a funcţiei f pe $\mathbb{R}$.

5p **a)** Să arate că există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $4F(x)=\sin^4 x+c$.

5p **b)** Să se calculeze aria subgraficului restricţiei funcţiei f la intervalul $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^{\pi} f^{2n+1}(x)dx=0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $(2+i)(3-2i)-(1-2i)(2-i)$.

5p **2.** Să se arate că $\frac{1}{3}$ este o perioadă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{3x\}$, unde $\{a\}$ este partea fracţionară a numărului a.

5p **3.** Să se rezolve în $[0,2\pi]$ ecuaţia $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$.

5p **4.** Să se calculeze $\frac{C_{20}^{10}}{C_{20}^{9}}$.

5p **5.** Se consideră punctele $A(2,3)$, $B(4,n)$, $C(2,2)$ şi $D(m,5)$. Să se determine $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram .

5p **6.** Să se calculeze $\cos^2 x$, ştiind că $\operatorname{tg} x=4$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie dreptele $d_1 : x + 2y = 3,\ d_2 : 3x - 4y = -1,\ d_3 : 4x + 3y = m$, unde $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine m astfel încât dreptele să fie concurente.

5p **b)** Să se demonstreze că există o infinitate de valori ale lui m pentru care vârfurile triunghiului determinat de cele trei drepte au toate coordonatele întregi.

5p **c)** Să se calculeze valorile lui *m* pentru care triunghiul determinat de cele trei drepte are aria 1.

2. Fie polinomul $f = 2X^3 - aX^2 - aX + 2$, cu $a \in \mathbb{R}$ și cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3.

5p **a)** Să se calculeze $f(-1)$.

5p **b)** Să se determine *a* pentru care polinomul are trei rădăcini reale.

5p **c)** Să se determine *a* astfel încât $|x_1| + |x_2| + |x_3| = 3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1-\sqrt{\left|1-x^2\right|}$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcției f pe intervalul $(-1,1)$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=x^{-2}f(x)$ este mărginită.

2. Fie funcția $f:[0,1]\to[1,3],\ f(x)=x^4+x^2+1$. Se admite că funcția f are inversa g .

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{2t+1}{f(\sqrt{t})}dt$.

5p **b)** Să se arate că $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 g(x)dx=3$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $\alpha\in[1,3]$, atunci are loc inegalitatea $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^{\alpha} g(x)dx\geq\alpha$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, 6, b_3, 24, \ldots$.

5p **2.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (3 - m^2)x + 3$, să fie strict crescătoare.

5p **3.** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{3\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea *M* a tuturor funcțiilor definite pe $A = \{1, 2, 3\}$ cu valori în $B = \{5, 6, 7\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o funcție din mulțimea *M*, aceasta să fie injectivă .

5p **5.** Se consideră punctul *G*, centrul de greutate al triunghiului *ABC*. Prin punctul *G* se duce paralela la *AB* care intersectează dreapta *BC* în punctul *P*. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{GP} = m\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Să se calculeze $\cos 2\alpha$, ştiind că $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sistemul $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+my+mz=-2 \end{cases}$, cu $m\in\mathbb{R}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & m & m\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se arate că $\operatorname{rang}(A)\neq 2$, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine valorile întregi ale lui $m\neq 1$, pentru care sistemul are soluție cu componente întregi.

2. Fie permutările $\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$, $\gamma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, elemente ale grupului $(S_4,\cdot)$.

5p **a)** Să se verifice că γ este soluție a ecuației $\alpha x = x\beta$.

5p **b)** Să se arate că $\alpha^4=\beta^4$.

5p **c)** Să se determine o soluție a ecuației $x\beta^3=\alpha^3 x$ în S_4.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră mulțimea de funcții
$M = \{ f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ este de două ori derivabilă şi } f(0)=0,\ f'(0)=1 \}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $u : [-1,1] \to \mathbb{R},\ u(x) = e^x \sin x$ aparține mulțimii *M*.

5p **b)** Să se arate că , dacă $f \in M$ şi $f(x) \neq 0,\ \forall x \in [-1,1] \setminus \{0\}$, atunci $\lim\limits_{x \to 0} (1 + f(x))^{\frac{1}{x}} = e$.

5p **c)** Să demonstreze că, dacă $f \in M$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f^n(x) - x^n}{x^{n+1}} = \dfrac{n f''(0)}{2}$.

2. Fie funcțiile $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ şi $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Să se arate că $g(x) = \ln(1+x)$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f^2(x) g(x) dx$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f\left(\dfrac{1}{n}\right) + f\left(\dfrac{2}{n}\right) + f\left(\dfrac{3}{n}\right) + \ldots f\left(\dfrac{n}{n}\right) \leq n \ln 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\frac{25}{4+3i}+\frac{25}{4-3i}$ este întreg.

5p **2.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m^2-2)x-3$ să fie strict descrescătoare.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale pare de două cifre , acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M şi respectiv N astfel încât $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$ şi $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Să se demonstreze că vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari.

5p **6.** Să se calculeze $\sin\frac{11\pi}{12}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi $B = A + A^t$, unde A^t este transpusa matricei A.

5p **a)** Să se arate că $B^t = B$.

5p **b)** Să se demonstreze că, dacă $B = 2I_2$, atunci $\det(A) \geq 1$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $x, y \in \mathbb{C}$ şi matricea $xA + yA^t$ este inversabilă, atunci $x + y \neq 0$.

2. Se consideră ecuația $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, şi x_1, x_2, x_3 soluțiile complexe ale acesteia.

5p **a)** Ştiind că $p = 1$ şi $q = 0$, să se determine x_1, x_2, x_3.

5p **b)** Să se determine p şi q ştiind că $x_1 = 1 + i$.

5p **c)** Să se arate că $12(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7) = 7(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln\frac{2x+1}{2x+3}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să arate că $f(x)<0, \forall x\in(0,\infty)$.

5p **c)** Să demonstreze că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)$ este strict descrescător.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este impară.

5p **b)** Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^1 f(x)dx\leq e-2$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine $z \in \mathbb{C}$ știind că $\dfrac{\overline{z}+7i}{z}=6$.

5p **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Să se calculeze $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(50)$.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(x)=3x+1$. Să se demonstreze că funcția f este neinversabilă.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o cifră din mulțimea $\{0,1,2,...,9\}$, aceasta să verifice inegalitatea $(x+1)!-x!\le 100$.

5p **5.** Să se arate că dreptele de ecuații $d_1:\ 2x-y+1=0$ și $d_2:\ 2x+y-1=0$ sunt simetrice față de axa Oy.

5p **6.** Să se calculeze $\cos\dfrac{7\pi}{12}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se verifice relația $A^3 - A = A^2 - I_3$.

5p **b)** Să se arate că $A^n - A^{n-2} = A^2 - I_3, \forall n\in \mathbb{N},\ n\geq 3$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $n\in \mathbb{N}^*$, suma elementelor matricei A^n este $n+3$.

2. Pentru fiecare $n\in \mathbb{N}^*$ se definește polinomul $P_n = X^n - 1\in \mathbb{C}[X]$.

5p **a)** Să se determine rădăcinile complexe ale polinomului P_4.

5p **b)** Să se descompună polinomul P_3 în factori ireductibili în $\mathbb{C}[X]$.

5p **c)** Să se descompună polinomul P_6 în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$.

5p **a)** Să se studieze derivabilitatea funcției f în origine.

5p **b)** Să arate că, pentru orice $k\in(0,\infty)$, există $c\in(k,k+1)$ astfel încât $f(k+1)-f(k)=\frac{1}{\sqrt[3]{c}}$.

5p **c)** Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+...+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-f(n)$, este strict descrescător.

2. Fie funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(1+x)$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^5}$, unde funcția $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $x\in[0,+\infty)$.

5p **c)** Să se arate, folosind eventual funcția *f*, că $\int_0^1 \ln(1+x)dx\leq\frac{5}{12}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $(1+i)^{20}$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$. Să se calculeze suma
$S = f\left(f(-10)\right)+f\left(f(-9)\right)+\ldots+f\left(f(-1)\right)+f\left(f(1)\right)+\ldots+f\left(f(9)\right)+f\left(f(10)\right)$.

5p **3.** Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_2\left(3^x+1\right)$ este injectivă .

5p **4.** Să se calculeze $A_5^3-6C_5^3$.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că distanţa de la punctul $A(m,\ m+1)$ la dreapta $d:\ 3x-4y-1=0$ este 1.

5p **6.** Să se calculeze $\cos 75^\circ-\cos 15^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru orice două matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se defineşte matricea $[A, B] = AB - BA$.

5p **a)** Pentru $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, să se calculeze $[A, A^2]$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $[A, A^*] = O_2$, unde A^* este adjuncta matricei A.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\left[A,[B,C]\right] + \left[B,[C,A]\right] + \left[C,[A,B]\right] = O_2$.

2. Se consideră intervalul $H = (0,1)$.

5p **a)** Să se arate că relația $a \circ b = \dfrac{ab}{ab + (1-a)(1-b)}$ defineşte o lege de compoziție pe H.

5p **b)** Să se arate că funcția $f:(0,+\infty) \to (0,1)$, $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ are proprietatea $f(xy) = f(x) \circ f(y)$, $\forall x, y > 0$, unde legea $"\circ"$ este definită la punctul **a)**.

5p **c)** Ştiind că legea $"\circ"$ definită la punctul **a)** este asociativă, să se rezolve în mulțimea $(H, \circ)$ ecuația $x \circ x \circ x = \dfrac{1}{2}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se defineşte funcția $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = e^{2x}$ şi, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, se defineşte funcția $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$.

5p **a)** Să se arate că $f_3(x) = 8e^{2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să determine asimptotele graficului funcției f_n.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_1(a) + f_2(a) + ... + f_{n-1}(a)}{f_n(a)}$, unde a este un număr real.

2. Fie funcția $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x\ln^2 x & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $[0,1]$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right)dx$.