**<u>Ministerul Educației, Cercetării și Inovării</u>**
**<u>Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar</u>**

# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
# Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.**
**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL I (30p)**

**5p** **1.** Să se determine numărul elementelor mulțimii $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z}$ știind că $A = (-3;4]$ și $B = (1;5]$.

**5p** **2.** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție a dreptei $y = 2x + 1$ cu parabola $y = x^2 - x + 3$.

**5p** **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1$.

**5p** **4.** Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale inecuația $2^{x!} \le 2048$.

**5p** **5.** Să se calculeze distanța de la punctul $A(1;1)$ la dreapta $d: 5x + 12y - 4 = 0$.

**5p** **6.** Să se calculeze $\operatorname{tg}(a+b)$ știind că $\operatorname{ctg} a = 2$ și $\operatorname{ctg} b = 5$.

**SUBIECTUL II (30p)**

**1.** Fie șirul $(F_n)_{n\geq 0}$, dat de $F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_0 = 0, F_1 = 1$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**5p** **a)** Să se verifice relația $A^2 = A + I_2$.

**5p** **b)** Să se arate că, dacă $X \in M_2(\mathbb{Q}),\ X \neq O_2$ și $AX = XA$, atunci $X$ este inversabilă.

**5p** **c)** Să se arate că $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \forall n \geq 1$.

**2.** Fie $\sigma, \pi \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

**5p** **a)** Să se demonstreze că $\sigma\pi \neq \pi\sigma$.

**5p** **b)** Să se determine numărul elementelor mulțimii $H = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

**5p** **c)** Să se arate că $H = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este un subgrup al grupului $(S_5, \cdot)$.

**SUBIECTUL III (30p)**

**1.** Se consideră funcția $f:[1,\infty)\to[1,\infty)$, $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x}$.

**5p** **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-f(x)\right)^x$.

**5p** **b)** Să se arate că funcția $f$ este strict crescătoare.

**5p** **c)** Să se arate că funcția $f$ este bijectivă.

**2.** Fie $a,b\in\mathbb{R}$ şi funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}ax+b, & x<1\\ \ln^2 x+1, & x\geq 1\end{cases}$.

**5p** **a)** Să se determine numerele reale $a$ şi $b$ astfel încât funcția $F$ să fie primitiva unei funcții $f$.

**5p** **b)** Să se calculeze $\int_1^e \dfrac{1}{xF(x)}dx$.

**5p** **c)** Să se arate că, pentru funcția $h:[1,\pi]\to\mathbb{R}$, $h(x)=(F(x)-1)\sin x$, are loc relația $\int_1^\pi h(x)h''(x)\,dx\leq 0$.

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
# Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.**
**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL I (30p)**

**5p** **1.** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|4x-8|-2|4-2x|$ este constantă.

**5p** **2.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care parabola $y=x^2-2x+a-1$ şi dreapta $y=2x+3$ au două puncte distincte comune.

**5p** **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x-1}+1=x$.

**5p** **4.** Să se determine numărul termenilor iraționali ai dezvoltării $\left(\sqrt{3}+1\right)^9$.

**5p** **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}=(m+1)\vec{i}+8\vec{j}$ şi $\vec{v}=(m-1)\vec{i}-4\vec{j}$ să fie coliniari .

**5p** **6.** Triunghiul $ABC$ are lungimile laturilor $AB=5$, $BC=7$ şi $AC=8$. Să se calculeze $m(\sphericalangle A)$.

**SUBIECTUL II (30p)**

**1.** Se consideră permutarea $\sigma \in S_6$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine $\sigma^{-1}$.

5p **b)** Să se arate că permutările $\sigma$ şi $\sigma^{-1}$ au acelaşi număr de inversiuni.

5p **c)** Să se arate că ecuaţia $x^4 = \sigma$ nu are soluţii în grupul $(S_6, \cdot)$.

**2.** Fie legea de compoziţie „$\circ$”, definită pe $\mathbb{R}$ prin $x \circ y = xy - x - y + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.

5p **a)** Să se arate că $(1, \infty)$ este parte stabilă în raport cu „$\circ$”.

5p **b)** Să se demonstreze că $f(xy) = f(x) \circ f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Ştiind că legea „$\circ$” este asociativă, să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de 10 ori } x} = 1025$.

**SUBIECTUL III (30p)**

**1.** Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{\pi}{x}, & x\in(0,1] \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $f$ este continuă pe $[0,1]$.

5p **b)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției $f$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $n\in\mathbb{N}^*$, atunci ecuația $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{x}$ are cel puțin o soluție în intervalul $\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right)$.

**2.** Fie funcțiile $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$ și $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 g(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței plane mărginită de graficele funcțiilor $f$ și $g$ și de dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
# Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.**
**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL I (30p)**

5p **1.** Să se calculeze $\left[\sqrt{2009}\right]+3\cdot\left\{-\frac{1}{3}\right\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui *x* și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui *x*.

5p **2.** Să se determine imaginea intervalului $[2,3]$ prin funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+8}-\sqrt{x}=2$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii divizorilor naturali ai numărului 56, acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** Fie vectorii $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$ , $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$ și $\vec{u}=6\vec{i}+2\vec{j}$. Să se determine $p,r\in\mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u}=p\vec{a}+r\vec{b}$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris unui triunghi care are lungimile laturilor 5 , 7 și 8.

**SUBIECTUL II (30p)**

**1.** Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, se notează $C(A) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}$. Se consideră matricele $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**5p** **a)** Să se arate că dacă $X, Y \in C(A)$, atunci $X + Y \in C(A)$.

**5p** **b)** Să se arate că dacă $E_1, E_2 \in C(A)$, atunci există $\alpha \in \mathbb{C}$ astfel încât $A = \alpha I_2$.

**5p** **c)** Să se arate că dacă $C(A)$ conține trei dintre matricele $E_1, E_2, E_3, E_4$, atunci o conține și pe a patra.

**2.** Fie $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ două permutări din grupul $(S_5, \cdot)$.

**5p** **a)** Să se rezolve în $S_5$ ecuația $ax = b$.

**5p** **b)** Să se determine ordinul elementului $ab$ în grupul $(S_5, \cdot)$.

**5p** **c)** Fie $k \in \mathbb{Z}$ cu $b^k = e$. Să se arate că 6 divide $k$.

**SUBIECTUL III (30p)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x$ şi un număr real $m$ din intervalul $(-2,\infty)$.

5p **a)** Să se determine punctele de extrem ale funcției *f*.

5p **b)** Să se demonstreze că ecuația $x^3-3x=m$ are soluție unică în mulțimea $(1,\infty)$.

5p **c)** Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f^2(x)$.

**2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} xe^x, & x\le 0 \\ \sin x, & x>0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine primitiva $F$ a funcției $f$ care are proprietatea $F(0)=-1$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
# Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.**
**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL I (30p)**

**5p** **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2$.

**5p** **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $\frac{2x-1}{1-x} \geq \frac{3x+2}{1-2x}$.

**5p** **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{2-x}+x=2$.

**5p** **4.** Se consideră dezvoltarea $(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{y})^{49}$. Să se determine termenul care îi conține pe $x$ și $y$ la aceeași putere.

**5p** **5.** Fie $\overrightarrow{r_A}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{r_B}=\vec{i}+3\vec{j}$ și $\overrightarrow{r_C}=3\vec{i}+2\vec{j}$ vectorii de poziție ai vârfurilor triunghiului $ABC$. Să se determine vectorul de poziție al centrului de greutate a triunghiului $ABC$.

**5p** **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului $ABC$, știind că $BC=3$ și $\cos A=\frac{1}{2}$.

**SUBIECTUL II (30p)**

**1.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

**5p** **a)** Să se verifice că $AB \neq BA$.

**5p** **b)** Să se arate că $A^4 + B^6 = 2I_2$.

**5p** **c)** Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $(AB)^n \neq I_2$.

**2.** Se consideră șirul $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall n \geq 1$ și polinoamele $P, Q_n \in \mathbb{Z}[X]$, $P = X^2 - X - 1$, $Q_n = X^n - F_n X - F_{n-1}$, $\forall n \geq 2$.

**5p** **a)** Să se arate că polinomul $X^3 - 2X - 1$ este divizibil cu $P$.

**5p** **b)** Să se determine rădăcinile reale ale polinomului $Q_3$.

**5p** **c)** Să se arate că, pentru orice $n \geq 2$, polinomul $Q_n$ este divizibil cu $P$.

**SUBIECTUL III (30p)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

5p **a)** Să se determine punctul în care tangenta la graficul funcției *f* este paralelă cu prima bisectoare.

5p **b)** Să se arate că valoarea minimă a funcției $f$ este 1.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{f(x)-1}$ nu este derivabilă în $x_0=0$.

**2.** Se consideră funcțiile $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\int_2^x \frac{t^2}{t^2-1}dt$ și $g:(1,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\int_0^{\ln\frac{x^2-1}{3}}\sqrt{3e^t+1}dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f(3)$.

5p **b)** Să se arate că $g'(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}$, $\forall x\in(1,\infty)$.

5p **c)** Să se arate că $g(x)=2f(x)$, $\forall x\in(1,\infty)$.

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

## Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.**
**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL I (30p)**

**5p** **1.** Să se calculeze $[-\sqrt{8}]-\{-2,8\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui *x* și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui *x*.

**5p** **2.** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x+y=5 \end{cases}$.

**5p** **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x-5\cdot 2^{x+1}+16=0$.

**5p** **4.** Să se determine $x\in\mathbb{N}$, $x\geq 2$ astfel încât $C_x^2+A_x^2=30$.

**5p** **5.** Fie punctele $O(0;0)$, $A(2;1)$ și $B(-2;1)$. Să se determine cosinusul unghiului format de vectorii $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$.

**5p** **6.** Să se calculeze $\operatorname{tg} 2x$, știind că $\operatorname{ctg} x = 3$.

**SUBIECTUL II (30p)**

**1.** Matricea $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifică $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

**5p** **a)** Să se arate că $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = (a^2+b^2)(x_n^2+y_n^2)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

**5p** **b)** Să se arate că, dacă $a^2+b^2 \le 1$, atunci şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt mărginite.

**5p** **c)** Să se arate că, dacă $a=1$ şi $b=\sqrt{3}$, atunci $x_{n+6} = 64x_n$, $\forall n\ge 0$.

**2.** Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_{11},+,\cdot)$.

**5p** **a)** Să se arate că ecuația $x^2=\hat{8}$ nu are soluții în $\mathbb{Z}_{11}$.

**5p** **b)** Să se determine numărul polinoamelor de grad doi din $\mathbb{Z}_{11}[X]$.

**5p** **c)** Să se arate că polinomul $X^2+X+\hat{1}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_{11}[X]$.

**SUBIECTUL III (30p)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{f(x)}{x-1}$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem ale funcției *f*.

5p **c)** Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției *f*.

**2.** Fie funcția $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

5p **a)** Să se determine o primitivă a funcției *f*.

5p **b)** Să se demonstreze că $\int_1^x f(t)dt\le\frac{x-1}{6},\forall x\in[1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1\frac{x^2}{1+x^6}dx$.

**Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării**
**Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar**

# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
# Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.**
**Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL I (30p)**

**5p** **1.** Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $2\overline{z}+z=3+4i$.

**5p** **2.** Ştiind că $x_1$ şi $x_2$ sunt rădăcinile ecuaţiei $x^2+3x+1=0$, să se calculeze $x_1^3+x_2^3$.

**5p** **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $1+5^x-2\cdot 25^x=0$.

**5p** **4.** Se consideră dezvoltarea $\left(a^2+\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^9$, $a\neq 0$. Să se determine rangul termenului care-l conţine pe $a^4$.

**5p** **5.** Să se calculeze $\vec{u}^2-\vec{v}^2$ ştiind că $\vec{u}-\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\vec{u}+\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}$.

**5p** **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris unui triunghi dreptunghic care are catetele de lungimi 5 şi 12.

**SUBIECTUL II (30p)**

**1.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și funcția $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X) = AX$.

**5p** **a)** Să se arate că $f(A) = I_2$.

**5p** **b)** Să se arate că $f(X + f(X)) = X + f(X)$, $\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**5p** **c)** Să se arate că funcția $f$ este bijectivă.

**2.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $M = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$.

**5p** **a)** Să se arate că dacă $X, Y \in M$, atunci $XY \in M$.

**5p** **b)** Să se arate că $G = \{X \in M \mid \det X \neq 0\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

**5p** **c)** Să se determine elementele de ordin doi din grupul $G$, definit la punctul **b)**.

**SUBIECTUL III (30p)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{4}{3}\right\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+5}{3x+4}$.

**5p** **a)** Să se determine asimptota la graficul funcției $f$ spre $+\infty$.

**5p** **b)** Să determine limita şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = f(1)f(2)...f(n)$.

**5p** **c)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(e^x)$.

**2.** Fie funcția $f:[1,e]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\ln x}$.

**5p** **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(e^x)dx$.

**5p** **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $f$ în jurul axei $Ox$.

**5p** **c)** Să se arate că $\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_1^e f(x)dx=e$.

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
# Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.**
**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL I (30p)**

**5p** **1.** Să se arate că numărul $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{3}$ este natural.

**5p** **2.** Să se arate că $\left(x^2+4x+5\right)\left(x^2+2x+2\right)\geq 1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2^2 x+\log_2(4x)=4$.

**5p** **4.** Să se determine termenul care nu-l conține pe $x$, din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{200}$, $x>0$ .

**5p** **5.** Se consideră dreapta $d:\ 4x-8y+1=0$ și punctul $A(2\ ;\ 1)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A$ și este paralelă cu dreapta $d$ .

**5p** **6.** Triunghiul $ABC$ are $AB=2$, $AC=4$ și $m(\sphericalangle A)=60^\circ$. Să se calculeze lungimea medianei duse din *A*.

**SUBIECTUL II (30p)**

**1.** Fie matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}\in M_{2,1}(\mathbb{R})$, cu $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}, \forall n\in \mathbb{N}$ şi $x_0=1, y_0=0$.

**5p** **a)** Să se determine $x_1, x_2, y_1$ și $y_2$.

**5p** **b)** Să se arate că $x_n + y_n\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^n$, $\forall n\in \mathbb{N}$.

**5p** **c)** Să se arate că $x_{n+2}-6x_{n+1}+x_n=0$, $\forall n\geq 0$.

**2.** Se consideră mulțimile de clase de resturi $\mathbb{Z}_7=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5},\hat{6}\}$ și $\mathbb{Z}_6=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5}\}$.

**5p** **a)** Să se rezolve în corpul $(\mathbb{Z}_7,+,\cdot)$ ecuația $\hat{3}x^2+\hat{4}=\hat{0}$.

**5p** **b)** Să se determine ordinul elementului $\hat{3}$ în grupul $\left(\mathbb{Z}_7^*,\cdot\right)$.

**5p** **c)** Să se arate că nu există niciun morfism de grupuri $f:(\mathbb{Z}_6,+)\to(\mathbb{Z}_7^*,\cdot)$ cu $f\left(\overline{2}\right)=\hat{3}$.

**SUBIECTUL III (30p)**

**1.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

5p **a)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\ge1}$ definit prin $x_1=\frac{1}{2}$ şi $x_{n+1}=f(x_n), \forall n\ge1$ are limită .

5p **b)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases} xf(x) & ,x\le 0 \\ \operatorname{arctg} x, & x>0 \end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se determine cel mai mare număr real $a$ care are proprietatea $f(x)\ge a+2\ln x, \forall x\in(0,\infty)$.

**2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$ şi $F$ o primitivă a sa.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to0}\frac{F(\cos x)-F(1)}{x^2}$.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=F(x)+f(x)$ are exact un punct de extrem local.

# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
# Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.**
**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL I (30p)**

**5p** **1.** Să se calculeze partea reală a numărului complex $\dfrac{1+4i}{4+7i}$.

**5p** **2.** Să se determine axa de simetrie a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-6x+1$.

**5p** **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+1}+3^{1-x}=10$.

**5p** **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A=\{1,3,5,...,2009\}$, acesta să fie multiplu de 3.

**5p** **5.** Se consideră dreapta $d:2x+y-1=0$ și punctul $A(3,\ 2)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A$ și este perpendiculară pe dreapta $d$.

**5p** **6.** Fie triunghiul $ABC$ care are $AB=AC=5$ și $BC=6$. Să se calculeze distanța de la centrul de greutate al triunghiului $ABC$ la dreapta $BC$.

**SUBIECTUL II (30p)**

**1.** Fie $a, b, c, d > 0$, matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi funcția $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Se notează $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

**5p** **a)** Să se arate că dacă $\det A = 0$, atunci $f$ este funcție constantă.

**5p** **b)** Să se arate că, dacă $\det A \neq 0$, atunci funcția $f$ este injectivă.

**5p** **c)** Să se arate că $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(x) = \dfrac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

**2.** Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi mulțimea $G = \{I_2 + aA + bB \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq -1\}$.

**5p** **a)** Să se arate că orice matrice din $G$ este inversabilă.

**5p** **b)** Să se arate că $G$ este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**5p** **c)** Să se arate că ecuația $X^2 = I_2$ are o infinitate de soluții în $G$.

**SUBIECTUL III (30p)**

**1.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\text{arctg}\, x$.

**5p** **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)g(x)\right)$.

**5p** **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f$.

**5p** **c)** Să se arate că $f(x)<g(x)$, pentru orice $x\in(0,\infty)$.

**2.** Fie $m\in\mathbb{R}$ şi funcția $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x-m, x\in[0,1] \\ x\ln x, x\in(1,2]\end{cases}$.

**5p** **a)** Să se arate că, pentru orice $m\in\mathbb{R}$, funcția $f$ este integrabilă.

**5p** **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{\int_1^x t\ln t\,dt}{x-1}$.

**5p** **c)** Pentru $m=1$, să se demonstreze că, pentru orice $t\in(0,2)$ există $a,b\in[0,2]$, $a\neq b$, astfel încât $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(t)$.

# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
# Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.**
**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL I (30p)**

**5p** **1.** Să se arate că numărul $\lg\left(1-\frac{1}{2}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{3}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{4}\right)+...+\lg\left(1-\frac{1}{100}\right)$ este întreg.

**5p** **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|x-3|+|4-x|=1$.

**5p** **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3 x+\frac{1}{\log_3 x}=\frac{5}{2}$.

**5p** **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A=\{2,4,6,...,2010\}$, acesta să fie divizibil cu 4 , dar să nu fie divizibil cu 8.

**5p** **5.** Se consideră punctele $A(2,m)$ și $B(m,-2)$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $AB=4$.

**5p** **6.** Să se calculeze $\sin^2 x$ știind că ctg $x$ = 6.

**SUBIECTUL II (30p)**

**1.** Se consideră sistemul $\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ -x - y + 4z = 0 \end{cases}$, cu $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care matricea sistemului are determinantul nenul.

5p **b)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită cel puțin două soluții.

5p **c)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care dreptele $d_1 : mx + y + 1 = 0,\ d_2 : x + 3y + 2 = 0,\ d_3 : -x - y + 4 = 0$ sunt concurente.

**2.** Se consideră mulțimea $H = \left\{ \begin{pmatrix} m & n \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \mid m, n \in \mathbb{Z}_5,\ m = \pm\hat{1} \right\}$.

5p **a)** Să se verifice că dacă $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, atunci $B \cdot A = A^{-1} \cdot B$.

5p **b)** Să se arate că *H* este un grup cu $10$ elemente în raport cu înmulțirea matricelor.

5p **c)** Să se determine numărul elementelor de ordinul 2 din grupul *H*.

**SUBIECTUL III (30p)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+x$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{f(x+1)}$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția $f$ este inversabilă.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$.

**2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2\sin x$ şi $F$ o primitivă a lui $f$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$

5p **b)** Să se determine $c\in(1,3)$ astfel încât $\int_1^3\dfrac{f(x)}{\sin x}dx=2c^2$.

5p **c)** Să se arate că funcția $F$ nu are limită la $+\infty$.

**Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării**
**Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar**

# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

# Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.**
**Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL I (30p)**

**5p** **1.** Să se arate că $2(1+3+3^2+...+3^8)<3^9$.

**5p** **2.** Fie $x_1, x_2$ soluţiile ecuaţiei $x^2+5x-7=0$. Să se arate că numărul $x_1^3+x_2^3$ este întreg.

**5p** **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5 x+\log_x 5=\frac{5}{2}$.

**5p** **4.** Să se determine $x\in\mathbb{N}$, $x\geq 3$ astfel încât $C_{2x-3}^2=3$.

**5p** **5.** Se consideră punctele $A(2,3)$ şi $B(-3,-2)$. Să se scrie ecuaţia mediatoarei segmentului $AB$.

**5p** **6.** Fie vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$. Ştiind că $\vec{u}\cdot\vec{v}=5$, $|\vec{u}|=2$ şi $|\vec{v}|=3$ să se calculeze $\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right)$.

**SUBIECTUL II (30p)**

**1.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ şi funcția $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X)=AX$ .

**5p** **a)** Să se calculeze $f(A)$.

**5p** **b)** Să se arate că $(f\circ f)(X)=O_2, \forall X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**5p** **c)** Să se arate că $f(X)+f(Y)\neq I_2, \forall X,Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**2.** Se consideră mulțimea $P=\left\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AA^t=I_2\right\}$, unde $A^t$ este transpusa matricei $A$.

**5p** **a)** Să se verifice dacă matricea $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii $P$.

**5p** **b)** Să se arate că înmulțirea matricelor determină pe mulțimea $P$ o structură de grup necomutativ.

**5p** **c)** Să se arate că, dacă $A,B\in P$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $AX=B$, atunci $X\in P$.

**SUBIECTUL III (30p)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$ .

5p **a)** Să se arate că mulțimea valorilor funcției *f* este $(0,\infty)$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\ln f(x)$, atunci $(f(x)-x)\cdot g'(x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $g(x)<x$, pentru orice $x>0$, unde *g* este funcția definită la punctul **b)**.

**2.** Fie mulțimea $M=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f \text{ este derivabilă și } \int_0^1 f(x)\,dx=f(0)=f(1)\right\}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2+x$ aparține mulțimii $M$ .

5p **b)** Să se arate că, dacă $f$ este o funcție polinomială de grad trei care aparține lui $M$ , atunci $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(0)$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $f\in M$ , ecuația $f'(x)=0$ are cel puțin două soluții în intervalul $(0,1)$.