# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
# Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.**
**Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL I (30p)**

**5p** **1.** Să se arate că numărul $100^{\lg 2}+\sqrt[3]{-27}$ este natural.

**5p** **2.** Să se determine imaginea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.

**5p** **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+1}=-3^x+8$.

**5p** **4.** Să se determine numărul funcţiilor $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ care au proprietatea că $f(1)+f(3)=7$.

**5p** **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(2,-1)$ şi $B(-1,1)$. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin originea axelor şi este paralelă cu dreapta *AB*.

**5p** **6.** Fie *a* şi *b* numere reale astfel încât $\sin a+\sin b=1$ şi $\cos a+\cos b=\frac{1}{2}$. Să se calculeze $\cos(a-b)$.

**SUBIECTUL II (30p)**

**1.** Pentru $p, q, r \in \mathbb{C}$, se consideră sistemul $\begin{cases} x + py + p^2z = p^3 \\ x + qy + q^2z = q^3 \\ x + ry + r^2z = r^3 \end{cases}$.

**5p** **a)** Să se arate că determinantul sistemului este $\Delta = (p-q)(q-r)(r-p)$.

**5p** **b)** Dacă *p*, *q*, *r* sunt distincte, să se rezolve sistemul.

**5p** **c)** Să se arate că, dacă sistemul are soluţia $(-1,1,1)$, atunci cel puţin două dintre numerele $p, q, r$ sunt egale.

**2.** Se consideră inelul $(A,+,\cdot)$ unde $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \ a,b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

**5p** **a)** Să se determine numărul elementelor mulţimii *A*.

**5p** **b)** Să se rezolve în mulţimea *A* ecuaţia $X^2 = I_2$.

**5p** **c)** Să se arate că $(A,+,\cdot)$ nu este corp.

**SUBIECTUL III (30p)**

**1.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to(-\infty,0),\ \ f(x)=\ln(1+x)-x$.

**5p** **a**) Să se demonstreze că funcţia $f$ este strict descrescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

**5p** **b**) Să se arate că funcţia $f$ este surjectivă.

**5p** **c**) Să se arate că graficul funcţiei $f$ nu admite asimptote.

**2.** Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg} x$.

**5p** **a**) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

**5p** **b**) Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int\limits_1^x f(\ln t)\,dt=\frac{\pi}{2}$.

**5p** **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$.

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
# Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.**
**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL I (30p)**

**5p** **1.** Să se calculeze partea întreagă a numărului $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}$.

**5p** **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} y=x^2-3x+1 \\ y=2x^2+x+4 \end{cases}$.

**5p** **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}$.

**5p** **4.** Să se determine numărul termenilor raționali ai dezvoltării $(\sqrt[4]{5}+1)^{100}$.

**5p** **5.** Să se arate că punctele $A(-1,5)$, $B(1,1)$ și $C(3,-3)$ sunt coliniare.

**5p** **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul care are lungimile laturilor 4, 5 și 7.

**SUBIECTUL II (30p)**

**1.** Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, cu $AB - BA = A$ și matricele $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**5p** **a)** Să se determine rangul matricei $A_0$.

**5p** **b)** Să se arate că $A_0 B_0 - B_0 A_0 = A_0$.

**5p** **c)** Să se demonstreze că $A^n B - BA^n = nA^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

**2.** Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 4X^3 - 12X^2 + aX + b$.

**5p** **a)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul *f* să se dividă cu polinomul $X^2 - 1$.

**5p** **b)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât ecuația $f(x) = 0$ să aibă soluția $x = i \in \mathbb{C}$.

**5p** **c)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul să aibă rădăcinile $x_1, x_2, x_3$ în progresie aritmetică și, în plus, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$.

**SUBIECTUL III (30p)**

**1.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x\operatorname{arctg}x$ şi şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit de $x_1=1,\ x_{n+1}=f(x_n),\forall n\in\mathbb{N}^*$.

**5p** **a**) Să se demonstreze că funcția $f'$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

**5p** **b**) Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției $f$ spre $-\infty$.

**5p** **c**) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

**2.** Fie şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin $I_n=\int_0^1(x-x^2)^n\,dx,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

**5p** **a**) Să se calculeze $I_2$.

**5p** **b**) Să se demonstreze că $I_n=\dfrac{n}{4n+2}I_{n-1},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$.

**5p** **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

## Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică informa- tică.**
**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - .informatică**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL I (30p)**

**5p** **1.** Să se determine valoarea de adevăr a propoziției: „Suma oricăror două numere iraționale este număr irațional.”

**5p** **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+2.$ Să se rezolve ecuația $f(f(x))=f^2(x).$

**5p** **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x-2^x=12$.

**5p** **4.** Fie mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o pereche $(a,b)$ din mulțimea $A\times A$, produsul numerelor *a* și *b* să fie impar.

**5p** **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(1,\ 3)$ și $C(-1,\ 1)$. Să se calculeze aria pătratului de diagonală *AC*.

**5p** **6.** Să se arate că $\sin 105^\circ+\sin 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

**SUBIECTUL II (30p)**

**1.** Se consideră mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{N} \right\}$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M$.

**5p** **a)** Câte matrice din mulțimea $M$ au suma elementelor egală cu 1?

**5p** **b)** Să se arate că $A^{-1} \notin M$ .

**5p** **c)** Să se determine toate matricele inversabile $B \in M$ care au proprietatea $B^{-1} \in M$ .

**2.** Se consideră ecuația $x^4 - 8x^3 + ax^2 + 8x + b = 0$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ şi cu soluțiile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

**5p** **a)** Să se arate că $(x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + x_1x_4 + x_2x_3 + (x_1 + x_4)x_2x_3 + (x_2 + x_3)x_1x_4 = a - 8$ .

**5p** **b)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$.

**5p** **c)** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $x_1, x_2, x_3, x_4$ să fie în progresie aritmetică.

**SUBIECTUL III (30p)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=x+e^{-x}$.

**5p** **a**) Să se demonstreze că funcția $f$ este strict crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$.

**5p** **b**) Să se arate că funcția $f$ admite exact un punct de extrem local.

**5p** **c**) Să se determine numărul de soluții reale ale ecuației $f(x)=m,$ unde $m$ este un număr real oarecare.

**2.** Fie funcțiile $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\int_1^{\operatorname{tg}x}\frac{t}{1+t^2}dt$ și $g:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ g(x)=\int_1^{\operatorname{ctg}x}\frac{1}{t(1+t^2)}dt.$

**5p** **a**) Să se calculeze $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

**5p** **b**) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

**5p** **c**) Să se arate că $f(x)+g(x)=0,\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
# Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.**
**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL I (30p)**

**5p** **1.** Să se determine partea reală a numărului complex $z=\frac{1-i}{1+i}$.

**5p** **2.** Să se determine valorile reale ale lui $m$ pentru care $x^2+mx+1\geq 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\arcsin 2x=-\frac{1}{2}$.

**5p** **4.** Se consideră mulțimea $A=\{0,1,2,3,\dots,9\}$. Să se determine numărul submulțimilor mulțimii $A$ care au 5 elemente, din care exact două sunt numere pare.

**5p** **5.** În sistemul cartezian de coordonate $xOy$ se consideră punctele $B(-1,\ 2)$ și $C(2,\ -2)$. Să se determine distanța de la punctul $O$ la dreapta $BC$.

**5p** **6.** Știind că $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ și $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, să se calculeze $\operatorname{ctg}\alpha$.

**SUBIECTUL II (30p)**

**1.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

**5p** **a)** Să se calculeze $AB+BA$.

**5p** **b)** Să se arate că $\operatorname{rang}(A+B)=\operatorname{rang}A+\operatorname{rang}B$.

**5p** **c)** Să se demonstreze că $(A+B)^n=A^n+B^n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

**2.** Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+4X^2+1\in\mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

**5p** **a)** Să se determine $a\in\mathbb{C}$ astfel încât polinomul *f* să se dividă cu $X+1$.

**5p** **b)** Să se arate că polinomul $g=X^4+4X^2+aX+1$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3},\frac{1}{x_4}$.

**5p** **c)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{C}$, polinomul $f$ nu are toate rădăcinile reale.

**SUBIECTUL III (30p)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+x+1}},\ a,b\in\mathbb{R}$.

**5p** **a**) Să se calculeze $f'(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b**) Să se arate că funcția $f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $a=2b>0$.

**5p** **c**) Pentru $a=2$ şi $b=1$, să se determine mulțimea valorilor funcției $f$.

**2.** Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\int_0^x e^{\arcsin t}\,dt$ .

**5p** **a**) Să se arate că funcția $f$ este strict monotonă.

**5p** **b**) Să se arate că $f(x)=\int_0^{\arcsin x} e^t\cos t\,dt, \forall x\in[-1,1]$ .

**5p** **c**) Să se determine $f(1)$ .

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
# Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.**
**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL I (30p)**

**5p** **1.** Să se determine partea întreagă a numărului $\frac{7}{5\sqrt{2}-1}$.

**5p** **2.** Fie $x_1$ și $x_2$ soluțiile reale ale ecuației $x^2+x-1=0$. Să se arate că $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\in\mathbb{Z}$.

**5p** **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2\cdot 3^x+3^{1-x}=7$.

**5p** **4.** Se consideră mulțimile $A=\{1,2,3,4\}$ și $B=\{1,2,3,4,5,6\}$. Să se determine numărul funcțiilor strict crescătoare $f:A\to B$.

**5p** **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(1,\ 3)$, $B(-2,\ 1)$ și $C(-3,-1)$. Să se calculeze lungimea înălțimii duse din vârful *A* în triunghiul *ABC*.

**5p** **6.** Să arate că $2\cdot(\sin 75^\circ-\sin 15^\circ)=\sqrt{2}$.

**SUBIECTUL II (30p)**

**1.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și mulțimea $C(A)=\left\{ X\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, XA=AX \right\}$.

5p **a)** Să se arate că $B\in C(A)$.

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in C(A)$, atunci există $x, y\in \mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix}x & 0\\ y & x\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X+X^2=A$.

**2.** Se consideră mulțimea $G=(-1,1)$, funcția $f:G\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ și corespondența $(x,y)\to x*y$, unde $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$, $\forall\, x,y\in G$.

5p **a)** Să se arate că această corespondență definește o lege de compoziție pe $G$.

5p **b)** Să se arate că $\forall x,y\in G,\ f(x*y)=f(x)f(y)$.

5p **c)** Știind că operația "$*$" este asociativă, să se calculeze $\dfrac{1}{2}*\dfrac{1}{3}*\ldots*\dfrac{1}{9}$.

**SUBIECTUL III (30p)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}$, $a\in\mathbb{R}$.

**5p** **a**) Să se calculeze $f'(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b**) Știind că $a=0$, să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** **c**) Să se determine toate numerele reale $a$ astfel încât funcția $f$ să aibă trei puncte de extrem local.

**2.** Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

**5p** **a**) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

**5p** **b**) Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $f$ în jurul axei $Ox$.

**5p** **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

# Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.**
**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL I (30p)**

**5p** **1.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Ştiind că $a_3 + a_{19} = 10$, să se calculeze $a_6 + a_{16}$.

**5p** **2.** Să se determine valorile parametrului real *m* pentru care ecuația $x^2 - mx + 1 - m = 0$ are două rădăcini reale distincte.

**5p** **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg^2 x + \lg x = 6$.

**5p** **4.** Se consideră mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ şi $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se determine numărul funcțiilor strict descrescătoare $f : A \to B$, cu proprietatea că $f(3) = 1$.

**5p** **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $M(2, -1)$, $N(-1, 1)$ şi $P(0, 3)$. Să se determine coordonatele punctului *Q* astfel încât $MNPQ$ să fie paralelogram.

**5p** **6.** Să se calculeze lungimea medianei duse din *A* în triunghiul *ABC*, ştiind că $AB = 2$, $AC = 3$ şi $BC = 4$.

**SUBIECTUL II (30p)**

**1.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**5p** **a)** Să se demonstreze că $\forall\, x\in \mathbb{R}$, $\det(A-xI_2)=x^2-(a+d)x+ad-bc$.

**5p** **b)** Dacă $A^2=O_2$, să se demonstreze că $a+d=0$.

**5p** **c)** Știind că $A^2=O_2$, să se calculeze $\det(A+2I_2)$.

**2.** Se consideră mulțimea $G=\left\{(a,b)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\;\middle|\; a^2-3b^2=1\right\}$ și operația $(a,b)*(c,d)=(ac+3bd,\, ad+bc)$.

**5p** **a)** Să se determine $a\in\mathbb{Z}$ pentru care $(a,15)\in G$.

**5p** **b)** Să se arate că, pentru orice $(a,b),(c,d)\in G$, $(a,b)*(c,d)\in G$.

**5p** **c)** Să se arate că $(G,*)$ este grup.

**SUBIECTUL III (30p)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{|x-1|}{e^x}$.

5p **a**) Să se arate că $f$ nu este derivabilă în punctul $x_0=1$.

5p **b**) Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x)=m$, unde $m$ este un parametru real.

5p **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\right)$.

**2.** Se consideră funcția $f:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2\sin x$.

5p **a**) Să se arate că există numerele reale $a, b, c$ astfel încât funcția $F:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\left(ax^2+b\right)\cos x+cx\sin x$ să fie o primitivă a funcției *f*.

5p **b**) Să se calculeze $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} f\left(\frac{1}{2x}\right)dx$.

5p **c**) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției *f* și graficul funcției $g:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\pi x-x^2$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
# Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.**
**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL I (30p)**

**5p** **1.** Să se arate că numărul $(2+i)^4+(2-i)^4$ este întreg.

**5p** **2.** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție dintre dreapta de ecuație $y=2x+1$ şi parabola de ecuație $y=x^2+x+1$.

**5p** **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2x+\sqrt{16+x^2}=11$.

**5p** **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de patru cifre, acesta să fie divizibil cu 9.

**5p** **5.** În sistemul cartezian de coordonate $xOy$ se consideră punctele $A(-1,\ 1)$, $B(1,\ 3)$ şi $C(3,\ 2)$. Fie $G$ centrul de greutate al triunghiului $ABC$. Să se determine ecuația dreptei $OG$.

**5p** **6.** Să se arate că $2\cdot\left(\cos 75^\circ+\cos 15^\circ\right)=\sqrt{6}$.

**SUBIECTUL II (30p)**

**1.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi funcția $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X)=AX-XA$.

**5p** **a)** Să se determine rangul matricei $A$.

**5p** **b)** Să se calculeze $f(B)$.

**5p** **c)** Să se arate că ecuația $f(X)=B$ nu are soluții.

**2.** Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3+a^2X-a$, $g=aX^3-a^2X^2-1$, cu $a\in\mathbb{R}^*$ şi $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$ rădăcinile polinomului *f*.

**5p** **a)** Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

**5p** **b)** Să se arate că rădăcinile polinomului *g* sunt inversele rădăcinilor polinomului *f*.

**5p** **c)** Să se arate că polinoamele $f$ şi $g$ nu au rădăcini reale comune.

**SUBIECTUL III (30p)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1,-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2-1}$.

**5p** **a**) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$.

**5p** **b**) Să se arate că graficul funcției $f$ admite asimptotă spre $+\infty$.

**5p** **c**) Să se demonstreze că funcția $f$ admite un singur punct de extrem local.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x-1+\dfrac{1}{2}x^2$.

**5p** **a**) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

**5p** **b**) Să se determine $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt$.

**5p** **c**) Să se demonstreze că $\int_0^1 \cos\left(x^2\right)dx \ge \dfrac{9}{10}$.

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
# Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.**
**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL I (30p)**

**5p** **1.** Să se determine partea reală a numărului complex $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$.

**5p** **2.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Să se calculeze $(f\circ f)(512)$.

**5p** **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\cos 2x+\sin x=0$.

**5p** **4.** Se consideră mulțimea $M=\{0,1,2,3,4,5\}$. Să se determine numărul tripletelor $(a,b,c)$ cu proprietatea că $a,b,c\in M$ și $a<b<c$.

**5p** **5.** Să se calculeze distanța dintre dreptele paralele de ecuații $x+2y=6$ și $2x+4y=11$.

**5p** **6.** Paralelogramul $ABCD$ are $AB=1$, $BC=2$ și $m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$. Să se calculeze produsul scalar $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

**SUBIECTUL II (30p)**

**1.** Se consideră sistemul $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ 7x-y+az=b \end{cases}$, unde $a$ și $b$ sunt parametri reali.

**5p** **a)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care determinantul sistemului este egal cu zero.

**5p** **b)** Să se determine valorile parametrilor $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

**5p** **c)** Să se arate există o infinitate de valori ale numerelor $a$ și $b$ pentru care sistemul admite o soluție $(x,y,z)$, cu $x,y,z$ în progresie aritmetică.

**2.** Se consideră mulțimea $G=\left\{ X(t)=\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \middle| t\in\mathbb{R} \right\}$.

**5p** **a)** Să se arate că $X(t)\cdot X(u)=X(t+u),\ \forall t,u\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Să se determine $t\in\mathbb{R}$ știind că $X(t)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

**5p** **c)** Să se arate că mulțimea $G$ formează grup abelian în raport cu înmulțirea matricelor.

**SUBIECTUL III (30p)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

**5p** **a**) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

**5p** **b**) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției $f$.

**5p** **c**) Să se demonstreze că funcția $f$ are două puncte de extrem.

**2.** Fie funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{1-x^2}$ și șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

**5p** **a**) Să se calculeze $\int_0^1 x f(x)dx$.

**5p** **b**) Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $f$ în jurul axei $Ox$.

**5p** **c**) Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
# Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.**
**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

## SUBIECTUL I (30p)

**5p** **1.** Să se arate că numărul $\log_9 \sqrt{3} + \log_4 \sqrt[3]{2}$ este rațional.

**5p** **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - 2mx + m - 1$, $m \in \mathbb{R}^*$. Să se determine $m \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $f(x) \le 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**5p** **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 2^{x+1} + 2^{x-1} = 56$.

**5p** **4.** Fie mulțimea $A = \{1, 2, ..., 1000\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{\sqrt[3]{n} \mid n \in A\}$, acesta să fie număr rațional.

**5p** **5.** Fie triunghiul $ABC$ și $M \in (BC)$ astfel încât $\overrightarrow{MC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$.

**5p** **6.** Știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\operatorname{tg} x = 3$, să se calculeze $\sin 2x$.

**SUBIECTUL II (30p)**

**1.** Se consideră $a \in \mathbb{R}$, sistemul $\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + az = a \\ z + x = 1 \end{cases}$ şi $A$ matricea sa.

5p **a)** Să se arate că $\det A \neq 0$.

5p **b)** Să se arate că soluția sistemului este formată din trei numere în progresie geometrică.

5p **c)** Să se determine inversa matricei $A$.

**2.** Se consideră pe $\mathbb{R}$ legea de compoziție dată de relația $x * y = xy - 5x - 5y + 30$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ şi mulțimea $G = (5, \infty)$.

5p **a)** Să se arate că legea $"*"$ are element neutru.

5p **b)** Să se demonstreze că $G$ este grup abelian în raport cu legea $"*"$.

5p **c)** Să se rezolve în grupul $(G, *)$ sistemul $\begin{cases} x * y = z \\ y * z = x \\ z * x = y \end{cases}$.

**SUBIECTUL III (30p)**

**1.** Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{4-3x^2}{x^3}$.

**5p** **a**) Să se demonstreze că graficul funcției $f$ admite asimptotă spre $+\infty$.

**5p** **b**) Să se determine mulțimea valorilor funcției $f$.

**5p** **c**) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției $g:[2,\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\arccos f(x)$.

**2.** Se consideră funcțiile $f:[1,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$ şi $F:[1,2]\to\mathbb{R},\ F(x)=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$.

**5p** **a**) Să se arate că funcția $F$ este o primitivă a funcției $f$.

**5p** **b**) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $f$ în jurul axei $Ox$.

**5p** **c**) Să se calculeze aria mulțimii cuprinse între dreptele de ecuații $x=1$ şi $x=2$, graficul funcției $F$ şi axa $Ox$.

# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
# Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.**
**Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

**SUBIECTUL I (30p)**

**5p** **1.** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele $2^{a-1}, 2^{-a+2}+1, 2^{a+1}+1$ să fie în progresie aritmetică.

**5p** **2.** Să se arate că vârful parabolei $y = x^2 + (2a-1)x + a^2$, $a \in \mathbb{R}$, este situat pe dreapta de ecuație $4x + 4y = 1$.

**5p** **3.** Să se arate că, dacă $z$ este soluție a ecuației $z^2 + 2z + 4 = 0$, atunci $z^2 - \dfrac{8}{z} = 0$.

**5p** **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{11, 12, \ldots, 50\}$, aceasta să fie divizibil cu $2$ şi cu $5$.

**5p** **5.** Trapezul isoscel $ABCD$ are bazele $[AB]$ şi $[CD]$ şi lungimea înălțimii egală cu $4$. Să se calculeze $\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right|$.

**5p** **6.** Să se calculeze $\mathrm{tg}\, 2\alpha$, ştiind că $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ şi $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$.

**SUBIECTUL II (30p)**

**1.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, transpusa $A^t \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B = AA^t$, și punctele $P_k(a_k, b_k)$, unde $k \in \{1, 2, 3\}$.

5p **a)** Să se calculeze $B$ știind că $P_1(1,2)$, $P_2(2,4)$, $P_3(-3,-6)$.

5p **b)** Să se arate că $\det(B) \geq 0$, oricare ar fi punctele $P_1, P_2, P_3$.

5p **c)** Să se arate că $\det(B) = 0$ dacă și numai dacă punctele $P_1, P_2, P_3$ sunt coliniare pe o dreaptă care trece prin originea axelor.

**2.** Se consideră mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii $M$.

5p **b)** Să se arate că $AB \in M$, pentru orice $A, B \in M$.

5p **c)** Să se arate că $(M, \cdot)$ este un grup, unde „$\cdot$” este înmulțirea matricelor.

**SUBIECTUL III (30p)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$.

5p **a**) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

5p **b**) Să se calculeze $f'(x),\ x \in \mathbb{R}^*$.

5p **c**) Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției $f$ către $+\infty$.

**2.** Fie șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $I_n = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,dx,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze $I_2$.

5p **b**) Să se demonstreze că $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c**) Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, are limita $0$.