Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Știind că $\log_3 2 = a$, să se arate că $\log_{16} 24 = \frac{1+3a}{4a}$.

5p **2.** Să se determine două numere reale care au suma 1 și produsul -1.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1} + 2^{x+2} = 160$.

5p **4.** Într-o clasă sunt 22 de elevi, dintre care 12 sunt fete. Să se determine în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete și 2 băieți.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$ și $C(1,3)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul C și este paralelă cu dreapta AB.

5p **6.** Să se arate că $\sin 6 < 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $x \in \mathbb{C}$ se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & x^2-1 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

5p **a)** Să se verifice că $\left(A(x)\right)^2 = 2xA(x)$.

5p **b)** Să se determine toate numerele complexe x pentru care $\left(A(x)\right)^4 + \left(A(x)\right)^2 = O_2$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $X^2 = A(0)$, $X \in M_2(\mathbb{C})$ nu are soluții.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = (X+i)^{100} + (X-i)^{100}$, care are forma algebrică $f = a_{100}X^{100} + a_{99}X^{99} + \ldots + a_1X + a_0$.

5p **a)** Să se calculeze $a_{100} + a_{99}$.

5p **b)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 1$.

5p **c)** Să se demonstreze că polinomul f are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{|x^2-x|}$.

5p **a**) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $-\infty$.

5p **b**) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f.

5p **c**) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze I_2.

5p **b**) Să se verifice că $I_{n+2}+I_n=\frac{1}{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră numărul real $s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{2009}}$. Să se demonstreze că $s\in(1;\,2)$.

5p **2.** Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ şi $g(x)=-4x+1$. Să se determine coordonatele punctului de intersecţie a graficelor celor două funcţii.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sin x=1+\cos^2 x$.

5p **4.** Fie mulţimea $A=\{-2,-1,\,0,\,1,\,2\}$. Să se determine numărul funcţiilor pare $f:A\to A$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$ şi $C(1,\,3)$. Să se determine coordonatele punctului *D* ştiind că patrulaterul *ABCD* este paralelogram.

5p **6.** Ştiind că $x\in\left(\frac{\pi}{2};\,\pi\right)$ şi că $\sin x=\frac{3}{5}$, să se calculeze $\sin\frac{x}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră în $\mathbb{R}^3$ sistemul $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=a \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că determinantul matricei sistemului are valoarea $(a+2)(a-1)^2$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p **c)** Să se rezolve sistemul în cazul $a=-2$.

2. Se consideră mulțimea $G\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, $G=\left\{\begin{pmatrix} a & 10b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{Q},\ a^2-10b^2=1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $A=\begin{pmatrix} 19 & 60 \\ 6 & 19 \end{pmatrix}\in G$.

5p **b)** Să se arate că $X\cdot Y\in G$, pentru oricare $X,Y\in G$.

5p **c)** Să se demonstreze că mulțimea G este infinită.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg}(x+2)-\operatorname{arctg}x$.

5p **a**) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

5p **b**) Să se demonstreze că $0<f(x)\le\frac{\pi}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **c**) Să se demonstreze că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)+\operatorname{arctg}\frac{(x+1)^2}{2}$ este constantă.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\operatorname{arctg}x$.

5p **a**) Să se calculeze $\int_1^2\frac{f'(x)}{x}dx$.

5p **b**) Să se determine $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}\int_0^x f(t)dt$.

5p **c**) Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții şi dreptele $x=0$ şi $x=1$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\log_4 16 + \log_3 9 + \sqrt[3]{27}$ este natural.

5p **2.** Să se determine valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x + 3 \cdot 4^x = 4$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\left\{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N},\ n < 100\right\}$, acesta să fie număr rațional.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,3)$ și $D(a,4)$, unde $a \in \mathbb{R}$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât dreptele AB și CD să fie paralele.

5p **6.** Știind că $x \in \mathbb{R}$ și că $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$, să se calculeze $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A = aI_3 + bB + cB^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze B^3.

5p **b)** Să se calculeze B^{-1}.

5p **c)** Să se demonstreze că $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a+b+c)\det(A) \geq 0$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ şi $H = \left\{x^2 \mid\ x \in \mathbb{Z}_7\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $H = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{Z}_7$ există $x, y \in \mathbb{Z}_7$ astfel încât $a = x^2 + y^2$.

5p **c)** Să se arate că $\{x^{2000} \mid x \in \mathbb{Z}_7\} = H$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ și șirul $(a_n)_{n\geq 1},\ a_n=\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{n\sqrt{n}},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se arate că funcția f' este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **b**) Să se demonstreze că $\dfrac{1}{2(k+1)\sqrt{k+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}<\dfrac{1}{2k\sqrt{k}},\ \forall k\in\mathbb{N}^*$.

5p **c**) Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

2. Se consideră funcțiile $f_n:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\int_0^x t^n \operatorname{arctg} t\,dt,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se arate că $f_1(x)=\dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\dfrac{x}{2},\ \forall x\geq 0$.

5p **b**) Să arate că $f_n(1)\leq\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{1}{n+1},\forall n\geq 1$.

5p **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nf_n(1)$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z=(3+4i)^4$.

5p **2.** Să se arate că vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+2x+1$ se găseşte pe dreapta de ecuație $x+y=0$.

5p **3.** Să se determine numărul soluțiilor ecuației $\sin x=\sin 2x$ din intervalul $[0,\ 2\pi)$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$. Să se determine numărul funcțiilor bijective $f:A\to A$, cu proprietatea că $f(1)=2$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,3)$ şi $D(a,4)$, $a\in\mathbb{R}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care dreptele AB şi CD sunt perpendiculare.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care are loc relația $\sin B+\cos B=\sin C+\cos C$.
Să se demonstreze că triunghiul ABC este isoscel.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{1,3}(\mathbb{R})$, $L = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ şi $A = LK$.

5p **a)** Să se calculeze suma elementelor matricei A.

5p **b)** Să se arate că $A^2 = 32A$.

5p **c)** Să se arate că rangul matricei A^n este 1, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x * y = axy - x - y + 6$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, unde a este o constantă reală.

5p **a)** Pentru $a = \frac{1}{3}$, să se demonstreze că legea „$*$” este asociativă.

5p **b)** Să se arate că legea „$*$” admite element neutru dacă şi numai dacă $a = \frac{1}{3}$.

5p **c)** Să se arate că, dacă intervalul $[0, 6]$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$” , atunci $a \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}-\ln\left(x+\frac{3}{2}\right)+\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)$ şi şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$a_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **b**) Să se arate că $f(x)<0$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

5p **c**) Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

2. Se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\int_0^x t^n \arcsin t\,dt$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze derivata funcției f_3.

5p **b**) Să se calculeze $f_1\left(\frac{1}{2}\right)$.

5p **c**) Să se determine $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f_2(x)$.

<u>Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării</u>
<u>Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar</u>

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului $(2+i)^3+(2-i)^3$.

5p **2.** Graficul unei funcţii de gradul al doilea este o parabolă care trece prin punctele $A(1,-3)$, $B(-1,3)$, $C(0,1)$. Să se calculeze valoarea funcţiei în punctul $x=2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3\cdot 4^x-6^x=2\cdot 9^x$.

5p **4.** Se consideră mulţimea $A=\{0,1,2,..., 2009\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea *A*, acesta să fie divizibil cu 5.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $A(0,-3)$ şi $B(4, 0)$. Să se calculeze distanţa de la punctul *O* la dreapta *AB*.

5p **6.** Să se calculeze aria unui paralelogram $ABCD$ cu $AB=6$, $AD=8$ şi $m(\sphericalangle ADC)=135^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că ecuaţia $AX = B$ are o infinitate de soluţii $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

5p **b)** Să se verifice că $A^3 = 10A$.

5p **c)** Să se determine rangul matricei A^*, adjuncta matricei A.

2. Se consideră mulţimea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, funcţia $f : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}$, $f(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ şi mulţimea $A = \left\{x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \mid f(x) = -1\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $7 + 5\sqrt{2} \in A$.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, $f(xy) = f(x)f(y)$.

5p **c)** Să se arate că mulţimea A este infinită.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f\left(x\right)=x-\ln(e^{x}+1)$.

5p **a**) Să se arate că funcția f' este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b**) Să se arate că $\lim\limits_{x\to\infty} x^{a} f(x)=0, \forall a\in\mathbb{R}$.

5p **c**) Să se determine asimptotele graficului funcției f.

2. Fie șirul $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $I_n=\int_0^2 (2x-x^2)^n dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze I_1.

5p **b**) Să se demonstreze că $\left(2n+1\right)I_n=2nI_{n-1}, \forall n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$.

5p **c**) Să se arate că șirul $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tinde descrescător către 0.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră numărul rațional $\frac{1}{7}$ scris sub formă de fracție zecimală infinită $\frac{1}{7} = 0,a_1a_2a_3\ldots$. Să se determine a_{60}.

5p **2.** Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-x$, $g(x)=3x+2$. Să se calculeze $(f\circ g)(x)-(g\circ f)(x)$.

5p **3.** Să se demonstreze că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^3+1$ este injectivă.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 50.

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care punctele $A(1,-2)$, $B(4,1)$ şi $C(-1,a)$ sunt coliniare.

5p **6.** Fie ABC un triunghi care are AB = 3, AC = 5 şi BC = 7. Să se calculeze $\cos A$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu proprietatea că $A^2 = O_2$.

5p **a)** Să se arate că $a + d = 0$.

5p **b)** Să se arate că matricea $I_2 + A$ este inversabilă.

5p **c)** Să se arate că ecuația $AX = O_2$ are o infinitate de soluții în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 - 2X^2 + 9$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$, numărul $a = \sqrt{2} + i$ şi mulțimile $A = \left\{ g(a) \mid g \in \mathbb{Q}[X] \right\}$ şi $B = \left\{ h(a) \mid h \in \mathbb{Q}[X], \text{grad}(h) \le 3 \right\}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(a)$.

5p **b)** Să se calculeze $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|$.

5p **c)** Să se arate că $A = B$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{\sqrt{3}\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-x}$ şi şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1=2,\ a_{n+1}=f(a_n),\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty,\sqrt{3})$ şi pe $(\sqrt{3},\infty)$.

5p **b**) Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **c**) Să se demonstreze că şirul $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu este convergent.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-x^2}$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F\left(x\right)=\int_1^x f(t)dt$.

5p **a**) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției F.

5p **b**) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

5p **c**) Să se calculeze $\int_0^1 F(x)\,dx$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma $1+4+7+...+100$.

5p **2.** Să se determine imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

5p **3.** Să se arate că numărul $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)+\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ este natural.

5p **4.** Să se determine numărul termenilor raționali din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{2}+1\right)^5$.

5p **5.** Fie *ABCD* un pătrat de latură 1. Să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

5p **6.** Să se arate că $\sin 105^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că $\det(A)=(a-b)(a-1)$.

5p **b)** Să se calculeze $\det\left(A-A^t\right)$.

5p **c)** Să se arate că $\operatorname{rang} A\geq 2$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3+pX^2+qX+r$, cu $p,q,r\in(0,\infty)$ și cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$.

5p **a)** Să se demonstreze că f nu are rădăcini în intervalul $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ în funcție de *p*, *q* și *r*.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă a,b,c sunt trei numere reale astfel încât $a+b+c<0$, $ab+bc+ca>0$ și $abc<0$, atunci $a,b,c\in(-\infty,0)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+3\operatorname{arctg}x$.

5p **a**) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b**) Să se arate că funcția f este bijectivă.

5p **c**) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^a}$ există, este finită și nenulă.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\ge 1}$ dat de $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze I_1.

5p **b**) Să se demonstreze că șirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este convergent.

5p **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că $\log_2 3 \in (1,2)$.

5p **2.** Să se determine valorile reale ale lui *m* pentru care $x^2+3x+m>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin x+\cos(-x)=1$.

5p **4.** Să se arate că, pentru orice număr natural *n*, $n\geq 3$, are loc relația $C_n^2+C_n^3=C_{n+1}^3$.

5p **5.** Se consideră dreptele de ecuații $d_1: 2x+3y+1=0$, $d_2: 3x+y-2=0$ și $d_3: x+y+a=0$.
Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care cele trei drepte sunt concurente.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului *ABC*, știind că $AB=4$, $AC=3$ și $m(\sphericalangle BAC)=60^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ şi mulţimea de matrice $M=\left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\b&a&0\\c&b&a\end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbb{C}\right\}$.

5p **a)** Să se calculeze A^3.

5p **b)** Să se arate că dacă $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ şi $AX=XA$, atunci $X\in M$.

5p **c)** Să se arate că ecuaţia $X^2=A$ nu are soluţii în $M_3(\mathbb{C})$.

2. Se consideră polinomul $f=aX^4+bX+c$, cu $a,b,c\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se arate că numărul $f(3)-f(1)$ este număr par.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}$, numărul $f(x)-f(y)$ este divizibil cu $x-y$.

5p **c)** Să se determine coeficienţii polinomului *f* ştiind că $f(1)=4$ şi $f(b)=3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=2x+\ln(x^2+x+1)$.

5p **a**) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare.

5p **b**) Să se demonstreze că funcția f este bijectivă.

5p **c**) Să se arate că graficul funcției f nu are asimptotă oblică spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\{x\}(1-\{x\})$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x.

5p **a**) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b**) Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **c**) Să se arate că valoarea integralei $\int_a^{a+1} f(x)\,dx$ nu depinde de numărul real a.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Să se demonstreze că $z^2=\overline{z}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $-x^2+4x-3\geq 0$.

5p **3.** Să se arate că funcția $f:(1;\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\frac{1}{x}$ este injectivă.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ pentru care $f(1)$ este număr par.

5p **5.** Fie *ABC* un triunghi care are *AB* = 2, *AC* = 3 și *BC* = $2\sqrt{2}$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Să se arate că $\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ bcx+acy+abz=0 \end{cases}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ și A matricea sistemului.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul, în cazul în care a,b,c sunt distincte două câte două.

5p **c)** Să se determine mulțimea soluțiilor sistemului, în cazul în care $a=b\neq c$.

2. Se consideră mulțimea $M=\left\{ a+b\sqrt{5} \mid a,b\in\mathbb{Z},\ a^2-5b^2=1 \right\}$.

5p **a)** Să se arate că $x=9+4\sqrt{5}\in M$.

5p **b)** Să se demonstreze că M este grup în raport cu înmulțirea numerelor reale.

5p **c)** Să se demonstreze că mulțimea M are o infinitate de elemente.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\ln x$.

5p **a**) Să se studieze monotonia funcției f.

5p **b**) Să se determine asimptotele graficului funcției f.

5p **c**) Să se demonstreze că orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu proprietatea $x_0\in(0,1), x_{n+1}=e^{f(x_n)}$ este convergent.

2. Se consideră şirul $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{4x+5}dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze I_2.

5p **b**) Să se arate că şirul $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ verifică relația $4I_{n+1}+5I_n=\frac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c**) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Se consideră $a \in \mathbb{R}$ şi numărul complex $z = \dfrac{a+2i}{2+ai}$. Să se determine *a* pentru care $z \in \mathbb{R}$.

5p **2.** Să se demonstreze că dreapta de ecuație $y = 2x + 3$ intersectează parabola de ecuație $y = x^2 - 4x + 12$ într-un singur punct.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-1} = x$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând o pereche (a, b) din produsul cartezian $A \times A$ să avem egalitatea $a + b = 6$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $M(2, -1)$, $A(1,\ 2)$ şi $B(4,\ 1)$. Să se determine lungimea vectorului $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.

5p **6.** Să se arate că $\sin(a+b) \cdot \sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$, pentru oricare $a, b \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&9&6\\2&6&4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1&3&2\end{pmatrix}$,

$B=I_3+A$, $C=I_3+aA$, cu $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $S=A-XY$.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $BC=I_3$.

5p **c)** Să se arate că $A^{n+1}=14A^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-1\in\mathbb{R}[X]$ şi numărul $\varepsilon\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, astfel încât $f(\varepsilon)=0$.

5p **a)** Să se demonstreze că $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe sistemul $\begin{cases}x+y+z=0\\x+y\varepsilon+z\varepsilon^2=0\\x+y\varepsilon^2+z\varepsilon=0\end{cases}$.

5p **c)** Să se arate că, dacă f divide $f_1(X^3)+Xf_2(X^3)+X^2f_3(X^3)$, unde f_1, f_2, f_3 sunt polinoame cu coeficienți complecşi, atunci fiecare dintre polinoamele f_1, f_2, f_3 este divizibil cu $X-1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției f are exact două puncte de inflexiune.

5p **c)** Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $-\infty$.

2. Se consideră funcțiile $F_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F_n(x)=\int_0^x t\sin^n t\,dt,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $F_1(\pi)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $F_{n+1}(1)<F_n(1),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(1)$.