EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^2 - 8x + 25 = 0$.

5p **2.** Să se determine $a \in \mathbb{R}$, pentru care graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a+1)x^2 + 3(a-1)x + a - 1$, intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1$.

5p **4.** Să se calculeze $C_8^4 - C_7^4 - C_7^3$.

5p **5.** Să se determine ecuația perpendicularei duse din punctul $A(1,2)$ pe dreapta $d : x + y - 1 = 0$.

5p **6.** Știind că $\sin x = \frac{1}{3}$, să se calculeze $\cos 2x$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, se consideră sistemul $\begin{cases} ax+by+cz=b \\ cx+ay+bz=a \\ bx+cy+az=c \end{cases}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că determinantul sistemului este $\Delta = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p **c)** Știind că $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$, să se arate că sistemul are o infinitate de soluții (x, y, z), astfel încât $x^2+y^2=z-1$.

2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c \in \mathbb{Z}_4 \right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii G.

5p **b)** Să se dea un exemplu de matrice $A \in G$ cu proprietatea că $\det A \neq \hat{0}$ şi $\det A^2 = \hat{0}$.

5p **c)** Să se determine numărul soluțiilor ecuației $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X \in G$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$.

5p **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^4}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{\frac{1}{x}}$.

5p **c)** Să se arate că ecuaţia $f'(x)=0$ are exact trei rădăcini reale.

2. Se consideră funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{1}{n^2+x^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze aria suprafeţei cuprinse între graficul funcţiei f_1, axele de coordonate şi dreapta $x=1$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 x\left(f_1(x)\right)^2 dx$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f_n(1)+f_n(2)+f_n(3)+\ldots+f_n(n)\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $1+i+i^2+...+i^{10}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$, $g(x)=2x-1$. Să se rezolve ecuația $(f\circ g)(x)=0$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x+9)+\lg(7x+3)=1+\lg(x^2+9)$.

5p **4.** Să se rezolve inecuația $C_n^2<10$, $n\geq 2$, n natural.

5p **5.** Se consideră dreptele paralele de ecuații $d_1:\ x-2y=0$ și $d_2:\ 2x-4y-1=0$. Să se calculeze distanța dintre cele două drepte.

5p **6.** Să se calculeze $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ a^3x+b^3y+c^3z=1 \end{cases}$, cu $a,b,c\in\mathbb{R}$, distincte două câte două şi A matricea sistemului.

5p **a)** Să se arate că $\det(A)=(a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul în cazul $a+b+c\neq 0$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $a+b+c=0$, atunci sistemul este incompatibil.

2. Se consideră şirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $a_0=0$ şi $a_{n+1}=a_n^2+1$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$ şi polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, cu $f(0)=0$ şi cu proprietatea că $f(x^2+1)=(f(x))^2+1$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $f(5)$.

5p **b)** Să se arate că $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $f(a_n)=a_n$.

5p **c)** Să se arate că $f=X$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{x^4+3}$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x), x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se determine mulțimea valorilor funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că $\left|f(x)-f(y)\right|\le|x-y|, \forall x, y\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x+2$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_2^3 \dfrac{f(x)}{x-1}dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_{-1}^0 \dfrac{x^2-13}{f(x)}dx$.

5p **c)** Să se determine punctele de extrem ale funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\int_0^{x^2} f(t)e^t dt$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_4 - a_2 = 4$ și $a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\dfrac{2x+3}{x+2} = \dfrac{x-1}{x-2}$.

5p **3.** Să se calculeze $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right)$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{1,2,3,...,40\}$, numărul $2^{n+2} \cdot 6^n$ să fie pătrat perfect.

5p **5.** Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC, dacă $A(5,-3), B(2,-1), C(0,9)$.

5p **6.** Știind că $\operatorname{tg}\alpha = 2$, să se calculeze $\sin 4\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $C(A)=\left\{ X=\begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{C} \right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, X\in C(A)$, $XA=AX$.

5p **b)** Să se arate că dacă $Y\in C(A)$ şi $Y^2=O_2$, atunci $Y=O_2$.

5p **c)** Să se arate că dacă $Z\in C(A), Z\neq O_2$ şi Z are toate elementele raţionale, atunci $\det Z\neq 0$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{Z}_3$ şi polinomul $f=X^3+\hat{2}X^2+a\in\mathbb{Z}_3[X]$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})$.

5p **b)** Pentru $a=\hat{2}$, să se determine rădăcinile din $\mathbb{Z}_3$ ale polinomului f .

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{Z}_3$ pentru care polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x+1$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, ecuația $f(x)=3+\frac{1}{n+1}$ are o unică soluție $x_n\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $\lim_{n\to\infty} x_n=1$, unde x_n este soluția reală a ecuației $f(x)=3+\frac{1}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Să se determine $\lim_{n\to\infty} n(x_n-1)$, unde x_n este soluția reală a ecuației $f(x)=3+\frac{1}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

2. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{1+t}dt$.

5p **a)** Să se arate că $\int_0^a \frac{1}{1+t}dt=\ln(1+a), \forall a>-1$.

5p **b)** Să se arate că $f(x)<\ln(1+x), \forall x>0$.

5p **c)** Să se arate că $f(\pi)>f(2\pi)$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p	**1.** Să se calculeze $z+\frac{1}{z}$ pentru $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
5p	**2.** Să se determine funcția de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care $f(-1)=f(1)=0,\ f(2)=6$.
5p	**3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=\frac{11}{6}$.
5p	**4.** Să se demonstreze că dacă $x\in\mathbb{R}$ şi $\lvert x\rvert\geq 1$, atunci $(1+x)^2+(1-x)^2\geq 4$.
5p	**5.** Să se determine ecuația înălțimii duse din B în triunghiul ABC, ştiind că $A(0,9)$, $B(2,-1)$ şi $C(5,-3)$.
5p	**6.** Să se calculeze $\left(2\vec{i}+5\vec{j}\right)\cdot\left(3\vec{i}-4\vec{j}\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră o matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Se notează cu A^t transpusa matricei *A*.

5p **a)** Să se demonstreze că $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $\forall\, X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $\det(zX) = z^3 \det(X)$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\det(A - A^t) = 0$.

5p **c)** Știind că $A \neq A^t$, să se demonstreze că $\operatorname{rang}(A - A^t) = 2$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$, cu $f = X^4 - 5X^2 + 4$.

5p **a)** Să se determine rădăcinile polinomului *f*.

5p **b)** Să se determine polinomul $h \in \mathbb{Q}[X]$, pentru care $h(0) = 1$ şi care are ca rădăcini inversele rădăcinilor polinomului *f*.

5p **c)** Știind că *g* este un polinom cu coeficienți întregi, astfel încât $g(-2) = g(-1) = g(1) = g(2) = 2$, să se arate că ecuația $g(x) = 0$ nu are soluții întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\sin x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p **b)** Să se arate că graficul funcției nu are asimptote.

5p **c)** Să se arate că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\sqrt[3]{f(x)}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f are primitive pe $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

5p **c)** Folosind eventual inegalitatea $e^x\geq x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, să se arate că $0\leq\int_0^x f(t)\,dt<1,\ \forall x>0$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică informa- tică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - .informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $(1-i)(1+2i)-3(2-i)$.

5p **2.** Să se arate că pentru oricare $a\in\mathbb{R}^*$, dreapta $y=x+4$ intersectează parabola $y=ax^2+(a-2)x+1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x}-3\cdot 2^{x+1}+8=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $\{10,11,12,...,40\}$, suma cifrelor lui să fie divizibilă cu 3.

5p **5.** În triunghiul *ABC* punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor. Fie *H* ortocentrul triunghiului *MNP*. Să se demonstreze că $AH=BH=CH$.

5p **6.** Să se calculeze $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea S_3 a permutărilor de 3 elemente se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că permutarea σ este pară.

5p **b)** Să se determine toate permutările $x \in S_3$, astfel încât $x\sigma = \sigma x$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $x^2 = \sigma$, cu $x \in S_3$.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \left\{ X(a) = I_2 + aA \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $X(a)X(b) = X(ab + a + b)$.

5p **b)** Să se arate că $(G, \cdot)$ este un grup abelian, unde „ $\cdot$ ” reprezintă înmulțirea matricelor.

5p **c)** Să se determine $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $X(1)X(2)...X(2009) = X(t-1)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x$.

5p **a)** Să se arate că funcția este convexă pe intervalul $(0,e]$.

5p **b)** Să se determine asimptotele graficului funcției.

5p **c)** Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 3}$, dat de $a_n=\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}+\frac{\ln 5}{5}+\ldots+\frac{\ln n}{n}-f(n)$, este descrescător.

2. Se consideră funcția $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$.

5p **a)** Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f și axele de coordonate.

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Fie z_1 și z_2 soluțiile complexe ale ecuației $2z^2+z+50=0$. Să se calculeze $|z_1|+|z_2|$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-2x$. Să se arate că funcția $f\circ f\circ f$ este strict descrescătoare.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+9^x=2$.

5p **4.** Fie mulțimea $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ și o funcție bijectivă $f:A\to A$. Să se calculeze $f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-1,3)$ și $B(1,-1)$. Să se determine ecuația mediatoarei segmentului AB.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ cu $\sin\alpha=\frac{1}{3}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$, cu $t\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că dacă matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $AX=XA$, atunci există $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se demonstreze că $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $B^n=\begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^2=A$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=3X^4-2X^3+X^2+aX-1\in\mathbb{R}[X]$.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$, unde $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ sunt rădăcinile polinomului f.

5p **b)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la $(X-1)^2$.

5p **c)** Să se demonstreze că f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg} x-\operatorname{arcctg} x$.

5p **a**) Să se determine asimptota la graficul funcției f spre $+\infty$.

5p **b**) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c**) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, dat de $x_{n+1}=f(x_n),\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ şi $x_1=0$, este convergent.

2. Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\arcsin x$.

5p **a**) Să se arate că funcția $g:[-1,1]\to\mathbb{R}, g(x)=xf(x)$ are primitive, iar acestea sunt crescătoare.

5p **b**) Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$.

5p **c**) Să se arate că $\int_0^1 x\,f(x)\,dx\leq\frac{\pi}{4}$.

<u>**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**</u>
<u>**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**</u>

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z = 1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^6$.

5p **2.** Să se determine valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + x$.

5p **3.** Să se rezolve în intervalul $(0;\infty)$ ecuația $\lg^2 x + 5\lg x - 6 = 0$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{0,1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ care au proprietatea $f(0) = f(1) = 2$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate *xOy* se consideră punctele $O(0,\ 0)$, $A(1,\ 2)$ și $B(3,1)$. Să se determine măsura unghiului AOB.

5p **6.** Știind că $\alpha\in\mathbb{R}$ şi că $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$, să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei $A+I_2$.

5p **b)** Să se demonstreze că dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AX=XA$, atunci există $x, y\in\mathbb{C}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}x & 0\\ y & x\end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se demonstreze că ecuaţia $Y^2=A$ nu are nicio soluţie în mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=x+y+xy$.

5p **a)** Să se arate că legea „$*$” este asociativă.

5p **b)** Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+1$. Să se verifice relaţia $f(x*y)=f(x)\cdot f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Să se calculeze $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*...*\frac{1}{2008}*\frac{1}{2009}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\arcsin x$.

5p **a**) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2-x}$.

5p **b**) Să se determine punctele în care funcția f nu este derivabilă.

5p **c**) Să se arate că funcția f este convexă.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

5p **a**) Să se arate că funcția F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b**) Să se arate că funcția F este bijectivă.

5p **c**) Să se calculeze $\int_0^a F^{-1}(x)\,dx$, unde F^{-1} este inversa funcției F și $a=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $(1+i)^{10}+(1-i)^{10}$.

5p **2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x-3x^2$. Să se ordoneze crescător numerele $f\left(\sqrt{2}\right)$, $f\left(\sqrt{3}\right)$ și $f(2)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-1}=3$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{0,1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ care au proprietatea că $f(0)$ este număr impar.

5p **5.** Fie triunghiul ABC și $M\in(BC)$ astfel încât $\frac{BM}{BC}=\frac{1}{3}$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Știind că $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ și că $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, să se calculeze $\operatorname{tg}\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se rezolve ecuația $\det(A-xI_2)=0$.

5p **b)** Să se arate că dacă matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ verifică relația $AX=XA$, atunci există $a,b\in\mathbb{C}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$

5p **c)** Să se determine numărul de soluții ale ecuației $X^3=A$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Se consideră mulțimea de funcții $G=\left\{ f_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f_{a,b}(x)=ax+b,\ a\in\mathbb{R}^*,\ b\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se calculeze $f_{-1,2}\circ f_{-1,2}$, unde „$\circ$” este compunerea funcțiilor.

5p **b)** Să se demonstreze că $(G,\circ)$ este un grup.

5p **c)** Să se arate că grupul G conține o infinitate de elemente de ordin 2.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f:[0,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\{x\}(1-\{x\})$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului x.

5p **a**) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$.

5p **b**) Să se determine domeniul de continuitate al funcției f.

5p **c**) Să se determine punctele în care funcția f nu este derivabilă .

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{2-\sin x}$ și $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

5p **a**) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx$.

5p **b**) Să se demonstreze că funcția F este strict crescătoare.

5p **c**) Să se determine $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se demonstreze că numărul $a=\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-2\sqrt{3}}$ este număr natural.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-5x+2$. Să se rezolve inecuația $f(2x)\le 0$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x=\sqrt{2-x}$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor nevide ale mulțimii $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, aceasta să aibă toate elementele impare.

5p **5.** Fie punctele $A(2,0)$, $B(1,1)$ și $C(3,-2)$. Să se calculeze $\sin C$.

5p **6.** Știind că $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și că $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2$, să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=0 \\ mx+y+z=m-1 \\ x+my+2z=-1 \end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$ şi matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(A)=0$.

5p **b)** Să se arate că pentru orice $m\in\mathbb{R}$ sistemul este compatibil.

5p **c)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că sistemul are o soluţie (x_0, y_0, z_0) cu $z_0=2$.

2. Se consideră mulţimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$, submulţimea $G=\left\{ X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3) \,\middle|\, X=\begin{pmatrix} a & \hat{2}b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}$ şi matricele $O_2=\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se verifice că dacă $x, y\in\mathbb{Z}_3$, atunci $x^2+y^2=\hat{0}$ dacă şi numai dacă $x=y=\hat{0}$.

5p **b)** Să se arate că mulţimea $H=G\setminus\{O_2\}$ este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

5p **c)** Să se rezolve ecuaţia $X^2=I_2$, $X\in G$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ și funcțiile $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^{2n-1} + x^{2n}, g_n(x) = x^{2n+1} + 1$.

5p **a**) Să se verifice că $f_n'(x) = \dfrac{g_n'(x)}{x+1} - \dfrac{g_n(x)}{(x+1)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

5p **b**) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} f_n'\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

5p **c**) Să se demonstreze că f_n are exact un punct de extrem local.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x^3} dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a**) Să se calculeze I_2.

5p **b**) Să se demonstreze că șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

5p **c**) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se demonstreze că numărul $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$ este natural.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+2$. Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$.

5p **4.** Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor nevide ale mulțimii $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, aceasta să aibă produsul elementelor 120.

5p **5.** Se consideră punctele $A(0,2)$, $B(1,-1)$ și $C(3,4)$. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului *ABC*.

5p **6.** Să se demonstreze că $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră numerele reale a, b, c, funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+2x+3$ și determinanții

$$A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix} \text{ și } B=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ f(a) & f(b) & f(c)\end{vmatrix}.$$

5p **a)** Să se arate că $A=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

5p **b)** Să se arate că $A=B$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice trei puncte distincte, cu coordonate naturale, situate pe graficul funcției f, aria triunghiului cu vârfurile în aceste puncte este un număr natural divizibil cu 3.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -9\end{pmatrix}$ și mulțimea $G=\left\{ X(a)=I_2+aA \;\middle|\; a\in\mathbb{R}\right\}$.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, a,b\in\mathbb{R}$, $X(a)X(0)=X(a)$ și $X(a)X(b)=X(a+b-10ab)$.

5p **b)** Să se arate că mulțimea $H=\left\{ X(a) \;\middle|\; a\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{10}\right\}\right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^2=I_2,\ X\in G$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\dfrac{x^3}{6}-\sin x$.

5p **a**) Să se determine $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

5p **b**) Să se calculeze derivata a doua a doua funcției *f*.

5p **c**) Să se demonstreze că $f(x)\le 0,\ \forall x\ge 0$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1+x}{1+x^2}$.

5p **a**) Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$ este o primitivă a funcției f.

5p **b**) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c**) Să se arate că șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit de $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n+k}{n^2+k^2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, este convergent.