Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ știind că numerele $2,\ a,\ b$ sunt în progresie geometrică și $2,\ 17,\ a$ sunt în progresie aritmetică.

5p **2.** Să se rezolve ecuația $f\left(f(x)\right)=0$, știind că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-3x+2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $\left[0,2\pi\right)$ ecuația $\operatorname{tg}(-x)=1-2\operatorname{tg}x$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{0,1,2\}\to\{0,1,2\}$ care verifică relația $f(2)=2$.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC și punctele D, E astfel încât $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EC}$. Să se arate că dreptele DE și BC sunt paralele.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, dacă $A=\dfrac{\pi}{4},\ B=\dfrac{\pi}{6}$ și $AB=6$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pentru $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ şi matricea transpusă A^t.

5p **a)** Pentru $a = c = 1$ şi $b = d = 0$, să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se arate că $A \cdot A^t = \alpha \cdot I_4$, unde $\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă $A \neq O_4$, atunci A este inversabilă.

2. Se consideră $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$, astfel încât $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1, |x_3| \leq 1$.

5p **a)** Să se demonstreze că $|a| \leq 3$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $c < 0$, polinomul are cel puţin o rădăcină reală în intervalul $(0, \infty)$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $a = 1, c = -1,$ atunci $b = -1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}-\{-2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x+2}e^{|x|}$.

5p **a)** Să se studieze derivabilitatea funcției f în punctul $x_0=0$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției f.

5p **c)** Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației $f(x)=m$, unde m este un parametru real.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$ și $g:(0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_x^1\dfrac{\sin t}{t}dt$.

Se admite cunoscut faptul că $f(x)\geq 0, \forall x\geq 0$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că funcția g este strict descrescătoare.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)>0,9$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}=\frac{7}{6}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $\left[0,2\pi\right)$ ecuația $\cos 2x=\frac{1}{2}$.

5p **4.** Să se determine $a>0$ știind că termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^{12}$ este egal cu 1848.

5p **5.** Să se determine ecuația simetricei dreptei $d: 2x-3y+1=0$ față de punctul $A(-3,4)$.

5p **6.** Știind că $\operatorname{ctg} x=3$, să se calculeze $\operatorname{ctg} 2x$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^2 + X + 1$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2 și $g = aX^2 + bX + c$, cu $a \neq 0$. Fie matricele $A, V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}$ și $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că $\det(V) = 3(x_2 - x_1)$.

5p **b)** Să se arate că $A \cdot V = \begin{pmatrix} g(1) & g(x_1) & g(x_2) \\ g(1) & x_1 g(x_1) & x_2 g(x_2) \\ g(1) & x_1^2 g(x_1) & x_2^2 g(x_2) \end{pmatrix}$.

5p **c)** Să se arate că $\det(A) = 0$ dacă și numai dacă $a + b + c = 0$ sau $a = b = c$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, $f(x) = x^4 + \hat{4}x$.

5p **a)** Să se calculeze $f(\hat{0})$ și $f(\hat{1})$.

5p **b)** Să se arate că funcția f nu este surjectivă.

5p **c)** Să se descompună polinomul $X^4 + \hat{4}X \in \mathbb{Z}_5[X]$ în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

5p **a)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq1}$ unde $x_n = f(1)+\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{3}f\left(\dfrac{1}{3}\right)+...+\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ este divergent.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

5p **c)** Să se arate că funcția f este descrescătoare.

2. Se consideră funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$.

5p **a)** Să se calculeze $f(2)$.

5p **b)** Să se demonstreze relația $f(x)\leq\dfrac{1}{x},\ \forall x>1$.

5p **c)** Să se demonstreze relația $f(x+1)=xf(x)-\dfrac{1}{e},\forall x>1$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $(1+i\sqrt{3})^2+(1-i\sqrt{3})^2$ este număr întreg.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x=6\left(\sqrt{x-2}-1\right)$.

5p **4.** Să se determine termenul care nu conține pe x din dezvoltarea $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^9$.

5p **5.** Să se calculeze distanța de la punctul $A(3,0)$ la dreapta $d:3x-4y+1=0$.

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB=4$, $BC=5$ şi $CA=6$. Să se arate că $m\left(\sphericalangle B\right)=2m\left(\sphericalangle C\right)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y+z=3 \\ mx+y+z=3m \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$. Pentru fiecare $m\in\mathbb{R}$, notăm cu S_m mulțimea soluțiilor reale ale sistemului.

5p **a)** Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

5p **b)** Să se arate că pentru orice $m\in\mathbb{R}$ sistemul este compatibil.

5p **c)** Să se determine $\min\left\{x^2+y^2+z^2 \mid (x, y, z)\in S_1\right\}$.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=A\cdot B$ şi mulțimea

$G=\left\{ X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \,\middle|\, \det(X)=1\right\}$.

5p **a)** Să se verifice că $A^4=B^6=I_2$.

5p **b)** Să se arate că $(G,\cdot)$ este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile de ordin doi, cu elemente numere complexe.

5p **c)** Să se demonstreze că $C^n\neq I_2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2-4}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine asimptota oblică a graficului funcției f spre ∞.

5p **b)** Să se arate că $f^2(x)\,f'(x)=x^2+2x$, $\forall x\in\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

5p **c)** Să se determine derivatele laterale ale funcției f în punctul $x_0=-2$.

2. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $F_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}, F_n(x)=\int_0^x t^n e^{-t}dt$, $x>0$.

5p **a)** Să se calculeze $F_1(x), x>0$.

5p **b)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției F_n.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} F_2(x)$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\lg\frac{1}{2}+\lg\frac{2}{3}+\lg\frac{3}{4}+...+\lg\frac{99}{100}$.

5p **2.** Să se determine $a\in\mathbb{R}^*$ pentru care $(a-3)x^2-ax-a<0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{8-x}=\sqrt[3]{9-4x}$.

5p **4.** Să se determine numărul elementelor unei mulțimi știind că aceasta are exact 45 de submulțimi cu două elemente.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei AB știind că $A(2,3)$ și $B(-5,4)$.

5p **6.** Triunghiul ABC ascuțitunghic are $AC=2\sqrt{3}$ și lungimea razei cercului circumscris egală cu 2. Să se determine măsura unghiului *B*.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

5p **a)** Să se calculeze rangul matricei *A*.

5p **b)** Să se arate că există $d \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = dA$.

5p **c)** Să se arate că există matricele $K \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ și $L \in M_{1,3}(\mathbb{R})$ astfel încât $A = K \cdot L$.

2. Se consideră numărul $a = \sqrt{3} - i \in \mathbb{C}$ și polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - 4X^2 + 16$.

5p **a)** Să se arate că $f(a) = 0$.

5p **b)** Să se determine rădăcinile polinomului *f*.

5p **c)** Să se arate că polinomul *f* este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$ se consideră funcția $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \sin^n x$ şi se notează cu x_n abscisa punctului de inflexiune din intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, al graficului funcției f_n.

5p **a)** Să se arate că $f_n''(x) = n(n-1)\sin^{n-2} x - n^2 \sin^n x,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$ şi $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $\sin x_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}},\ n \geq 3$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x_n)$.

2. Se consideră $a \in \mathbb{R}$ şi funcțiile $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - 3x + a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, F(x) = \frac{x^2 + ax + 5}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Pentru $a = 2$, să se determine aria suprafeței plane cuprinsă între graficul functiei *f*, axa Ox şi dreptele $x = 1$ şi $x = 2$.

5p **c)** Să se determine a astfel încât $\int_0^2 F(x)dx - \int_{-2}^0 F(x)dx = 2$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\log_3\left(5-\sqrt{7}\right)+\log_3\left(5+\sqrt{7}\right)-\log_3 2$.

5p **2.** Să se determine funcția de gradul al doilea al cărei grafic este tangent la axa *Ox* în punctul $(1,0)$ şi trece prin punctul $(0,2)$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $\left[0,2\pi\right)$ ecuația $\sin x+\cos x=0$.

5p **4.** Câte numere naturale de patru cifre se pot forma cu elemente ale mulțimii $\left\{1,3,5,7,9\right\}$?

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(-2,2)$ şi este paralelă cu dreapta determinată de punctele $C(2,1)$, $D(-1,-3)$.

5p **6.** Fie $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$. Să se calculeze $\sin\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se arate că dacă $a+b+c \neq 0$ şi A nu este inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$, atunci $a = b = c$.

5p **c)** Să se arate că sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} ax+by+cz = \frac{1}{2}x \\ cx+ay+bz = \frac{1}{2}y \\ bx+cy+az = \frac{1}{2}z \end{cases}$ admite numai soluția $x = y = z = 0$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - 5X^2 + 5$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.

5p **b)** Să se arate că polinomul *f* are toate rădăcinile reale.

5p **c)** Să se arate că dacă *g* este un polinom cu coeficienți reali care are proprietatea că pentru orice *x* real $|g(x)| \leq |f(x)|$, atunci există $a \in [-1, 1]$ astfel încât $g = af$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, se consideră funcţia $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

5p **a)** Să se arate că f_n este strict descrescătoare pe $[0;1]$ şi strict crescătoare pe $[1;\infty)$.

5p **b)** Să se arate că ecuaţia $f_n(x) = 0$, $x > 0$ are exact două rădăcini $a_n \in (0,1)$ şi $b_n \in (1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde a_n s-a definit la punctul **b)**.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$ şi $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $I_0 = \frac{\pi}{4}$.

5p **b)** Să se arate că $I_{2n} = \frac{1}{2n-1} - I_{2n-2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\right) = I_0$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{2-i}{2+i}$.

5p **2.** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $x^2 + ax + 2 \geq 0$, oricare ar fi numărul real x.

5p **3.** Să se rezolve în intervalul $[-1,1]$ ecuația $\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin x = \frac{\pi}{3}$.

5p **4.** Să se rezolve ecuația $C_n^8 = C_n^{10}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 10$.

5p **5.** Să se afle măsura celui mai mare unghi al triunghiului ABC știind că $A(2,-2)$, $B(2,3)$, $C(-2,3)$.

5p **6.** Fie $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel încât $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $G = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{R},\ a > 0 \right\}$.

5p **a)** Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.

5p **b)** Să se găsească două matrice $C, D \in G$ pentru care $CD \neq DC$.

5p **c)** Să se arate că dacă $A \in G$, atunci $I_2 - A + A^2 \in G$.

2. Se consideră $a, b, c \in \mathbb{Q}$ şi polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$.

5p **a)** Să se determine a, b, c astfel încât polinomul *f* să aibă rădăcinile $x_1 = x_2 = 1$ şi $x_3 = -2$.

5p **b)** Să se arate că dacă *f* are rădăcina $\sqrt{2}$, atunci *f* are o rădăcină rațională.

5p **c)** Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$, iar numerele $f(0)$ şi $f(1)$ sunt impare, atunci polinomul *f* nu are rădăcini întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este mărginită pe $\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=(1-x)^n$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f_2(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $\int_0^1 xf_n(x)dx=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\left(\dfrac{x}{n}\right)dx$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$ este întreg.

5p **2.** Să se determine imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-x+2$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{-2x+1}=5$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a+b=4$.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(-1,1)$ şi este perpendiculară pe dreapta $d:5x-4y+1=0$.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC ştiind că $AB=6$, $B=\frac{\pi}{4}$ şi $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}-3 & -8\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze A^2-B^2.

5p **b)** Să se calculeze $\det(I_2+A+A^2+A^3+A^4)$.

5p **c)** Să se arate că ecuația $X^2=I_2$ are o infinitate de soluții în $M_2(\mathbb{Z})$.

2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Q}[X]$, $f=X^4+X^3+X^2+X+1$, cu rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$ și $g=X^2-1$.

5p **a)** Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

5p **b)** Să se calculeze $(1-x_1)\cdot(1-x_2)\cdot(1-x_3)\cdot(1-x_4)$.

5p **c)** Să se calculeze $g(x_1)\cdot g(x_2)\cdot g(x_3)\cdot g(x_4)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $x_1 \in (0,1)$ şi $x_{n+1} = \dfrac{x_n^5 + 3x_n}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $x_n \in (0,1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p **b)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+2}}{x_n} = \dfrac{9}{16}$.

2. Se consideră o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că $xf(x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\pi} x^2 f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

5p **c)** Să se arate că $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \le \cos 1$.

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $x^2 - 2x + 4 = 0$.

5p **2.** Să se afle valoarea minimă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

5p **3.** Să se rezolve în intervalul $[-1,1]$ ecuaţia $\arcsin x + \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$.

5p **4.** Care este probabilitatea ca, alegând un număr k din mulţimea $\{0,1,2,...,7\}$, numărul C_7^k să fie prim.

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\vec{v} = 4\vec{i} + (a+4)\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Să se calculeze $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)$, ştiind că $A(-3,4)$, $B(4,-3)$ şi $C(1,2)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze A^3.

5p **b)** Să se afle rangul matricei $I_3 + A + A^t$.

5p **c)** Să se determine inversa matricei $I_3 + A$.

2. Se consideră $a,b \in \mathbb{R}$ şi polinomul $f = X^3 + 4aX^2 + 20X + b$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

5p **a)** Să se determine x_1, x_2, x_3 în cazul $a = 2, b = 0$.

5p **b)** Să se demonstreze că $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 = 8(4a^2 - 15)$.

5p **c)** Să se determine a,b astfel încât polinomul f să aibă o rădăcină dublă egală cu $-a$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to[0,\infty),\ f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$ şi şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $x_0=2,\ x_{n+1}=f(x_n),\forall n\in\mathbb{N}.$

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, are limita 1.

5p **c)** Să se arate că şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $y_n=x_0+x_1+x_2+...+x_n-n,$ este convergent.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1+\cos x$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=x\int_0^x f(t)\,dt$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că F este funcție pară.

5p **c)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcției F.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{8}$.

5p **2.** Să se determine funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ știind că graficul său şi graficul funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -3x + 3$ sunt simetrice față de dreapta $x = 1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.

5p **5.** Să se determine ecuația medianei duse din vârful A al triunghiului ABC, unde $A(1,2)$, $B(2,3)$ și $C(2,-5)$.

5p **6.** Să se arate că $\operatorname{ctg} 2 = \dfrac{\operatorname{ctg} 1 - \operatorname{tg} 1}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y+z+t=0 \\ x+y-z+t=0 \\ x+y+z-t=0 \end{cases}$ şi A matricea sistemului.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se rezolve sistemul.

5p **c)** Să se determine A^{-1}.

2. Fie polinomul $f = X^4 + 2X^3 + aX^2 - 2X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ şi $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ rădăcinile sale.

5p **a)** Să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.

5p **b)** Să se arate că $f(x) = x^2\left[\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x - \frac{1}{x}\right) + a + 2\right]$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

5p **c)** Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care toate rădăcinile polinomului *f* sunt numere reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:(-2,2)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcţiei *f*.

5p **b)** Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcţiei *f*.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x^a f\left(\frac{1}{x}\right)$, unde *a* este un număr real.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{-x^3+2x^2-5x+8}{x^2+4},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^4 (x+f(x)-2)^2\,dx$.

5p **c)** Ştiind că funcţia f este bijectivă, să se calculeze $\int_{\frac{4}{5}}^{2} f^{-1}(x)\,dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că $2 \in \left(\log_3 4, \sqrt{5}\right)$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^2 - 2x + 2 = 0$.

5p **3.** Să se rezolve în $[0, 2\pi)$ ecuația $\sin x + \cos x = -1$.

5p **4.** Să se calculeze $C_4^4 + C_5^4 + C_6^4$.

5p **5.** Pe laturile *AB* și *AC* ale triunghiului *ABC* se consideră punctele *M*, respectiv *N* astfel încât $\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{MB}$ și $MN \parallel BC$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{CN} = m\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Să se calculeze perimetrul triunghiului OAB, știind că $O(0,0)$, $A(-1,2)$ și $B(-2,3)$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră triunghiul *ABC*, cu laturile $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ şi sistemul $\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$.

5p **a)** Să se rezolve sistemul în cazul $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

5p **b)** Să se demonstreze că, pentru orice triunghi, sistemul are soluție unică.

5p **c)** Ştiind că soluția sistemului este (x_0, y_0, z_0), să se demonstreze că $x_0, y_0, z_0 \in (-1, 1)$.

2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.

5p **a)** Să se determine numărul elementelor mulțimii *G*.

5p **b)** Să se arate că $AB \in G$, pentru orice $A, B \in G$.

5p **c)** Să se determine numărul matricelor din mulțimea *G* care au determinantul nul.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2e^x+3x^2-2x+5.$

5p **a)** Să se demonstreze că funcția *f* este strict crescătoare pe $[0,\infty)$.

5p **b)** Să se arate că funcția f nu este surjectivă .

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

2. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(t)=\dfrac{1}{(1+t^2)(1+t^3)}$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 (t^3+1)f(t)dt$.

5p **b)** Să se arate că $\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(t)dt=\int_1^x t^3 f(t)dt,\ \forall x>0.$

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)dt$.