EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul natural x din egalitatea $1+5+9+...+x=231$.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $2x^2-5x+3\le 0$.

5p **3.** Să se determine inversa funcției bijective $f:(0,\infty)\to(1,\infty),\ f(x)=x^2+1$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,...,10\}$. Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii *A*, care conțin elementul 1.

5p **5.** Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât distanța dintre punctele $A(2,m)$ și $B(m,-2)$ să fie 4.

5p **6.** Să se calculeze $\cos\frac{23\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, cu $a, b\in \mathbb{R}$ şi $b\neq 0$.

5p **a)** Să se arate că dacă matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $AX = XA$, atunci există $u, v\in \mathbb{R}$, astfel încât $X=\begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.

5p **b)** Să se arate că $\forall\, n\in \mathbb{N}^*$, $A^n=\begin{pmatrix} x_n & y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$, unde $x_n=\dfrac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}$, $y_n=\dfrac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^3=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră $a\in \mathbb{Z}_7$ şi polinomul $f=\mathrm{X}^6+a\mathrm{X}+\hat{5}\in \mathbb{Z}_7[\mathrm{X}]$.

5p **a)** Să se verifice că, pentru orice $b\in \mathbb{Z}_7$, $b\neq\hat{0}$, are loc relația $b^6=\hat{1}$.

5p **b)** Să se arate că $x^6+\hat{5}=(x^3-\hat{4})(x^3+\hat{4}),\ \forall x\in \mathbb{Z}_7$.

5p **c)** Să se demonstreze că pentru orice $a\in \mathbb{Z}_7$, polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_7[X]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră numărul real $a>0$ şi funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-ax$.

5p **a)** Să se determine asimptota oblică la graficul funcției f către $-\infty$.

5p **b)** Să se determine punctele de extrem local ale funcției *f*.

5p **c)** Să se determine $a\in(0,\infty)$, ştiind că $f(x)\geq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $F:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2)$, este o primitivă a funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că orice primitivă G a funcției f este crescătoare pe $[1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției *f*, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=\dfrac{1}{e}$ şi $x=e$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $(1-i)^{24}$ este real.

5p **2.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{3x-1}{x+1}+\frac{x+1}{2x-1}=3$.

5p **3.** Să se determine inversa funcției bijective $f:\mathbb{R}\to(1,\infty)$, $f(x)=e^x+1$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a\neq b$.

5p **5.** Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC, unde $A(-2,-1), B(2,0), C(0,6)$.

5p **6.** Fie vectorii $\vec{u}=m\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v}=(m-2)\vec{i}-\vec{j}$. Să se determine $m>0$ astfel încât vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ să fie perpendiculari.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se arate că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = aA$.

5p **b)** Să se calculeze $(A - A^t)^{2009}$.

5p **c)** Să se rezolve ecuația $X^5 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Pentru a, b din mulțimea $M = [0, \infty)$ se definește operația $a * b = \ln(e^a + e^b - 1)$.

5p **a)** Să se arate că dacă $a, b \in M$, atunci $a * b \in M$.

5p **b)** Să se arate că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **c)** Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, să se determine $a \in M$ astfel încât $\underbrace{a * a * \ldots * a}_{\text{de } n \text{ ori } a} = 2a$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră şirul $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dat de $a_1\in(0,1)$ şi $a_{n+1}=a_n\left(1-\sqrt{a_n}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se arate că $a_n\in(0,1)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **b)** Să se demonstreze că şirul $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

5p **c)** Să se arate că şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dat de $b_n=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, este mărginit superior de a_1.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right), x\in\mathbb{R}$, este o primitivă a funcției *f*.

5p **b)** Să se calculeze aria suprafeței delimitate de dreptele $x=0, x=1, Ox$ şi graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(2x+1)f(x)$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f(x)dx$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{5}$.

5p **2.** Să se determine valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^2-8x+1$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x-1)+\lg(6x-5)=2$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.

5p **5.** Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(6,4)$ și este perpendiculară pe dreapta $d: 2x-3y+1=0$.

5p **6.** Știind că $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, să se calculeze $\cos 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se verifice egalitatea $A^2 - A = 2I_3$.

5p **b)** Să se calculeze A^{-1}.

5p **c)** Să se arate că $A^{2009} + A^{2008} = 2^{2008}(A + I_3)$.

2. Se consideră cunoscut că $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ este un inel comutativ, unde $x * y = x + y - 3$ și $x \circ y = x \cdot y - 3x - 3y + 12$, $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}$.

5p **a)** Să se arate că elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$" este 4.

5p **b)** Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât între inelele $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ să existe un izomorfism de forma $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = a \cdot x + b$.

5p **c)** Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{Z}$ ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de 2009 ori } x} = 2^{2009} + 3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=18x^2-\ln x$.

5p **a)** Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei *f*.

5p **b)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care $f(x)\geq a,\ \forall x\in(0,\infty)$.

5p **c)** Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuaţiei $f(x)=m$, unde *m* este un parametru real.

2. Se consideră funcţiile $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_a(x)=\dfrac{1}{|x-a|+3}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, funcţia f_a are primitive strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^3 f_2(x)dx$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^3 f_a(x)dx$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se arate că numărul $\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2$ este real.

5p **2.** Să se arate că vârful parabolei $y=x^2+5x+1$ este situat în cadranul III.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x-10\cdot 3^{x-1}+1=0$.

5p **4.** Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă exact două cifre egale.

5p **5.** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ și $\vec{v}=-(5a-1)\vec{i}+2\vec{j}$ sunt perpendiculari.

5p **6.** Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ascuțitunghic ABC știind că $AB=6$, $AC=10$ şi că aria triunghiului ABC este egală cu $15\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze rangul matricei *A*.

5p **b)** Să se demonstreze că $\det(A^t \cdot A)=0$.

5p **c)** Să se determine o matrice nenulă $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{Q})$ astfel încât $AB=O_2$.

2. Se știe că $(G,\circ)$ este grup, unde $G=(3,\infty)$ și $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to G$, $f(x)=x+3$.

5p **a)** Să se calculeze $4\circ 5\circ 6$.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f este un izomorfism de grupuri, de la $\left((0,\infty),\cdot\right)$ la $(G,\circ)$.

5p **c)** Să se demonstreze că dacă *H* este un subgrup al lui *G* care conține toate numerele naturale $k\ge 4$, atunci *H* conține toate numerele raționale $q>3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției *f*.

5p **b)** Să se demonstreze că funcția f nu are puncte de extrem local.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+f(3)+...+f(n)\right)^{n^2}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $I_n=\int_1^2\dfrac{x^n}{x^n+1}dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n\le 1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze $\frac{1}{1+2i}+\frac{1}{1-2i}$.

5p **2.** Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ inecuația $x^2-10x+12\le 0$.

5p **3.** Să se determine inversa funcției bijective $f:(1,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=3\log_2 x$.

5p **4.** Să se determine numărul funcțiilor $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$ cu proprietatea că $f(1)=f(4)$.

5p **5.** Să se determine coordonatele vârfului D al paralelogramului $ABCD$ știind că $A(-2,9),B(7,-4),C(8,-3)$.

5p **6.** Triunghiul ABC are $B=\frac{\pi}{3}$ și lungimea razei cercului circumscris egală cu 1. Să se calculeze lungimea laturii AC.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră punctele $A(0,6)$, $B(1,4)$, $C(-1,8)$ şi matricea $M=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&a\\6&4&8&b\end{pmatrix}$, unde $a,b\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că punctele A, B, C sunt coliniare.

5p **b)** Să se determine rangul matricei M în cazul $a=3, b=0$.

5p **c)** Să se arate că dacă unul dintre minorii de ordin trei ai lui M, care conțin ultima coloană, este nul, atunci $\text{rang}(M)=2$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziție $x*y=5xy+6x+6y+6$.

5p **a)** Să se arate că legea "$*$" este asociativă.

5p **b)** Să se determine elementele simetrizabile ale mulțimii $\mathbb{Z}$ în raport cu legea "$*$".

5p **c)** Să se rezolve ecuația $\underbrace{x*x*x*\ldots*x}_{\text{de 2009 ori } x}=-1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$.

5p **a)** Să se calculeze derivata funcției *f*.

5p **b)** Să se determine punctele graficului funcției f în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta de ecuație $9y=2x$.

5p **c)** Să se arate că, dacă $x>1$, atunci $\ln x\geq\frac{2(x-1)}{x+1}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x^2}$ și șirul $(a_n)_{n\geq1}, a_n=f(1)+f(2)+...+f(n)$.

5p **a)** Să se arate că $f(k+1)\leq\int_k^{k+1}f(x)dx\leq f(k),\forall k\in(0,\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx,\ n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq1}$ este convergent.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze suma tuturor numerelor naturale de două cifre care se divid cu 11.

5p **2.** Să se determine funcția f de gradul al doilea știind că $f(-1)=1$, $f(0)=1$, $f(1)=3$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $(0,\pi)$ ecuația $\sin 3x = \sin x$.

5p **4.** Câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{2,4,6,8\}$?

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC cu vârfurile în $A(1,2)$, $B(2,-2)$ și $C(4,6)$. Să se calculeze $\cos B$.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC știind că $C=\dfrac{\pi}{6}$ și $AB=6$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4\end{pmatrix}\in S_5$.

5p **a)** Să se calculeze σ^{2009}.

5p **b)** Să se dea exemplu de o permutare $\tau\in S_5$ astfel încât $\tau\sigma\neq e$ și $(\tau\sigma)^2=e$.

5p **c)** Să se demonstreze că, pentru orice $\tau\in S_5$, există $p\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\tau^p=e$.

2. Se consideră $a\in\mathbb{C}$, x_1, x_2, $x_3\in\mathbb{C}$ rădăcinile ecuației $x^3-2x^2+2x-a=0$ și determinantul

$$\Delta=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_3 & x_1 & x_2\\ x_2 & x_3 & x_1\end{vmatrix}.$$

5p **a)** Pentru $a=1$, să se determine x_1, x_2 și x_3.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, ecuația are o singură rădăcină reală.

5p **c)** Să se arate că valoarea determinantului Δ nu depinde de a.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{x\cdot\ln x}$.

5p **a)** Să se arate că $f'(x)=f(x)(1+\ln x),\forall x>0.$

5p **b)** Să se determine valoarea minimă a funcției *f*.

5p **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,\infty)$.

2. Se consideră, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, funcțiile $f_n:(-1,\infty)\to\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{x^{2n}}{1+x}$ și $g_n:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$,

$g_n(x)=1-x+x^2-x^3+...-x^{2n-1}+f_n(x)$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 g_2(x)dx$.

5p **b)** Să se arate că $0\le\int_0^1 f_n(x)dx\le\dfrac{1}{2n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}\right),n\in\mathbb{N}.$

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se calculeze modulul numărului complex $z=\frac{8+i}{7-4i}$.

5p **2.** Să se determine valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+6x-9$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea $[0,2\pi)$ ecuația $\sin x=-\frac{1}{2}$.

5p **4.** Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care mulțimea $\{1,2,...,n\}$ are exact 120 de submulțimi cu două elemente.

5p **5.** Se știe că, în triunghiul ABC, vectorii $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ au acelaşi modul. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic.

5p **6.** Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC care are lungimile laturilor egale cu 3, 4 şi 5.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi sistemul $\begin{cases}x+2y+3z+4t=3\\ y+2z+3t=2\\ z+2t=1\end{cases}$.

5p **a)** Să se determine rangul matricei A.

5p **b)** Să se determine mulțimea soluțiilor sistemului.

5p **c)** Să se demonstreze că ecuația $XA=B$ nu are soluții $X\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{A(k)=\begin{pmatrix}2^k & 2^k\\ 2^k & 2^k\end{pmatrix}\middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, și pentru fiecare $t\in\mathbb{Z}$ notăm cu $H_t=\left\{A(kt-1)\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$. Se admite faptul că $(G,\cdot)$ este un grup, unde „$\cdot$” este înmulțirea matricelor.

5p **a)** Să se arate că $\forall\, n,\ p\in\mathbb{Z}$, $A(n)\cdot A(p)=A(n+p+1)$.

5p **b)** Să se demonstreze că, pentru orice $t\in\mathbb{Z}$, H_t este un subgrup al grupului $(G,\cdot)$.

5p **c)** Să se demonstreze că grupurile $(G,\cdot)$ și $(\mathbb{Z},+)$ sunt izomorfe.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$ şi şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se determine asimptotele graficului funcției *f*.

5p **b)** Să se arate că, pentru orice $k>0$, $\frac{1}{k+1}<f(k+1)-f(k)<\frac{1}{k}$.

5p **c)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător şi are termenii pozitivi.

2. Se consideră funcțiile $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$ şi $F:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$,

$F(x)=a\ln(x+1)+b\ln(x^2+1)+c\,\text{arctg}\,x$, unde a, b, c sunt parametri reali.

5p **a)** Să se determine a, b, c astfel încât F să fie o primitivă a funcției f.

5p **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Să se studieze monotonia funcției F, în cazul în care F este primitivă a funcției f.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2 = -4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + x + c$. Știind că punctele $A(1,2)$ și $B(0,3)$ aparțin graficului funcției f, să se determine numerele reale a și c.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{7x+1} - x = 1$.

5p **4.** Câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma cu cifre din mulțimea $\{1,3,5,7,9\}$?

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele E și F astfel încât $\overline{AE} = \overline{EB}$, $\overline{DF} = 2\overline{FE}$. Să se demonstreze că punctele A, F și C sunt coliniare.

5p **6.** Fie triunghiul ABC. Să se calculeze lungimea înălțimii corespunzătoare laturii BC știind că $AB = 13$, $AC = 14$ și $BC = 15$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se calculeze $\det(A)$.

5p **b)** Să se arate că $A^{2n}=\frac{2^{2n}-1}{3}A+\frac{2^{2n}+2}{3}I_3$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se determine A^{-1}.

2. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ și ecuația $x^3-x+a=0$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3.

5p **a)** Să se calculeze $(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)$.

5p **b)** Să se determine x_2 și x_3 știind că $x_1=2$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care x_1, x_2, x_3 sunt numere întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\cos x$ şi şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_0=0,\ x_{n+1}=f(x_n),\ \forall n\in\mathbb{N}.$

5p **a)** Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că $0\le x_n\le\frac{\pi}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}$.

5p **c)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\ge1}$ este convergent la $\frac{\pi}{2}$.

2. Se consideră şirul de numere reale $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit de $I_0=\frac{\pi}{2}$ şi $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător.

5p **c)** Să se arate că $nI_nI_{n-1}=\frac{\pi}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Să se determine numărul natural x pentru care $1+3+5+\ldots+x=225$.

5p **2.** Să se determine valorile parametrului real m știind că graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx-2m$ intersectează axa Ox în două puncte situate la distanța 3.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(2^{-x+1}+1\right)=x$.

5p **4.** Să se arate că $C_{17}^3>C_{17}^{15}$

5p **5.** Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ de latură 4. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

5p **6.** Să se arate că $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+...+\sin^2 90^\circ=\frac{91}{2}$

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ trei puncte din plan şi matricea $M = \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Să se arate că, dacă A, B, C se află pe dreapta de ecuație $y = 2x$, atunci $\det(M) = 0$.

5p **b)** Să se arate că, dacă triunghiul *ABC* este dreptunghic şi are catetele de lungime 1, atunci $\det(M) = \pm 1$.

5p **c)** Să se arate că, dacă matricea M este inversabilă, atunci suma elementelor matricei M^{-1} este 1.

2. Se consideră mulțimea de matrice $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

5p **a)** Să se arate că, dacă $X \in A$ şi $Y \in A$, atunci $X + Y \in A$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $X \in A, Y \in A$ şi $XY = O_2$, atunci $X = O_2$ sau $Y = O_2$.

5p **c)** Admitem cunoscut faptul că *A* este inel în raport cu adunarea şi înmulțirea matricelor. Să se determine elementele inversabile ale acestui inel.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\sin x$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este crescătoare.

5p **b)** Admitem că pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ ecuația $f(x)=n$ are o soluție unică x_n. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este nemărginit.

5p **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}$, unde şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ a fost definit la **b)**.

2. Fie funcțiile $f, g_n:[0,1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{1-x}, g_n(x)=\dfrac{x^n}{1-x}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}}(f(x)-g_2(x))dx$.

5p **b)** Să se arate că $0\leq\int_0^{\frac{1}{2}}g_n(x)dx\leq\dfrac{1}{2^n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 2^2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^3}+...+\dfrac{1}{n\cdot 2^n}\right)=\ln 2$.

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p **1.** Ştiind că $z \in \mathbb{C}$ şi că $z^2 + z + 1 = 0$, să se calculeze $z^4 + \frac{1}{z^4}$.

5p **2.** Să se determine funcţia f de gradul întâi, pentru care $f(f(x)) = 2f(x) + 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg(x+1) - \lg 9 = 1 - \lg x$.

5p **4.** Să se determine numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $\left(3 + \sqrt[3]{3}\right)^{10}$.

5p **5.** Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC, ştiind că $A(-1,0)$, $B(0,2)$, $C(2,-1)$.

5p **6.** Să se arate că unghiul vectorilor $\vec{u} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ este obtuz.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră permutările $e, \alpha \in S_3$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Să se calculeze α^3.

5p **b)** Să se rezolve ecuația $\alpha^{2009} \cdot x = e$, $x \in S_3$.

5p **c)** Să se demonstreze că, oricare ar fi ordinea factorilor, produsul tuturor permutărilor din S_3 este permutare impară.

2. Fie inelul $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

5p **a)** Să se dea exemplu de un număr complex z astfel încât $z \notin \mathbb{Z}[i]$ și $z^2 \in \mathbb{Z}[i]$.

5p **b)** Să se determine elementele inversabile ale inelului $\mathbb{Z}[i]$.

5p **c)** Să se arate că mulțimea $H = \{(m+n) + (m-n)i \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}[i]$ în raport cu înmulțirea.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\operatorname{arctg}x-\ln\left(1+x^2\right)$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Să se arate că funcția f' este mărginită.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}, I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}dx, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_n\leq \frac{1}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} I_n$.