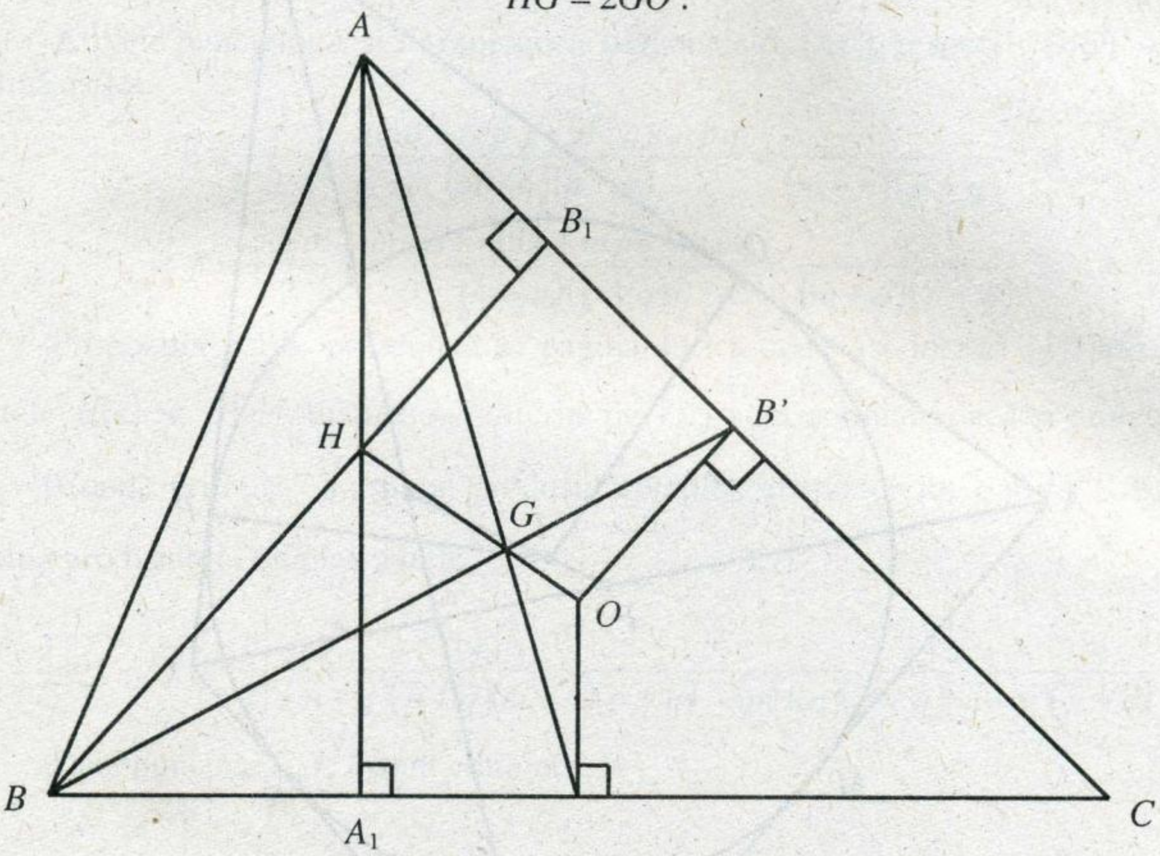
CAPITOLUL IV. TEOREME CLASICE DE GEOMETRIE DEMONSTRATE UTILIZÂND TRANSFORMĂRILE GEOMETRICE

1. DREAPTA LUI EULER

Teoremă: Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, G centrul de greutate şi H ortocentrul triunghiului. Punctele H, G şi O se găsesc pe o dreaptă şi:

$$HG = 2GO.$$



Demonstraţie: Se cunoaşte că $GA' = \frac{1}{2}GA$. Această proprietate a centrului de greutate ne sugerează ideea utilizării omotetiei $h_{G,-\frac{1}{2}}$, prin care punctul A se transformă în punctul $A' = h_{G,-\frac{1}{2}}(A)$. Deoarece prin omotetie, o dreaptă care nu trece prin centrul omotetiei se transformă într-o dreaptă paralelă cu ea, înseamnă că înălţimea AH se transformă în mediatoarea segmentului BC. Analog, înălţimea BH se transformă în mediatoarea laturii AC. Prin urmare, punctul H, intersecţia înălţimilor, se transformă în punctul O, intersecţia mediatoarelor.

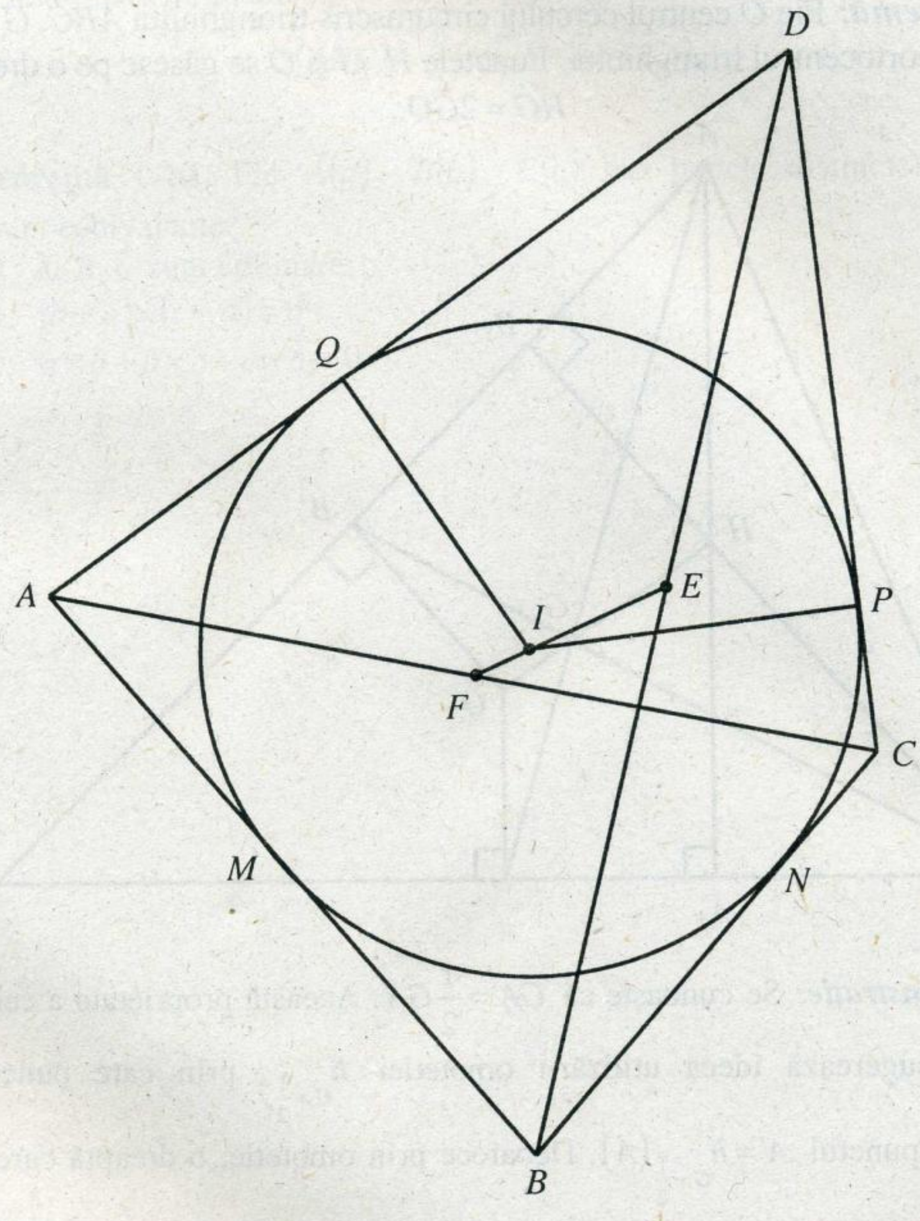
De aici se deduc două proprietăţi:

a) Punctele H, G şi $O = h_{G,-\frac{1}{2}}(H)$ sunt coliniare (din definiţia omotetiei)

b) $GO = \left|-\frac{1}{2}\right| \cdot GH \Leftrightarrow HG = 2GO$.

2. DREAPTA NEWTON-GAUSS

Teoremă: Mijloacele diagonalelor unui patrulater circumscriptibil şi centrul cercului înscris sunt situate pe o aceeaşi dreaptă (numită dreapta lui Newton-Gauss).



Demonstraţie: Considerăm că originea sistemului de axe de coordonate ortogonale coincide cu centrul al cercului înscris în patrulaterul $ABCD$, notat cu I, iar raza acestui cerc se consideră că este egală cu unitatea.

Fie $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in CD$ şi $Q \in DA$, punctele de tangenţă ale patrulaterului $ABCD$ cu cercul înscris. Notăm cu a, b, c, d afixele vârfurilor patrulaterului $ABCD$ şi cu m, n, p, q afixele punctelor de tangenţă. Aşadar, $|m| = |n| = |p| = |q| = 1$.

Deoarece $IP \perp DP$, rezultă, conform teoremei 6.1.11. de la pagina 116 a lucrării [1], că $(p-0)\circ(p-d)=0$ şi având în vedere definiţia produsului real al numerelor complexe rezultă că $\overline{p}(p-0)+p(\overline{p}-\overline{d})=0$ sau $\overline{p}d+p\overline{d}=2$ (1).

În mod similar, din $IQ \perp DQ$ se ajunge la $\overline{q}d+q\overline{d}=2$ (2).

Relaţiile (1) şi (2) permit exprimarea numărului d astfel:

$$d=\frac{2pq}{p+q}.$$

În mod analog se obţin egalităţile:

$$a=\frac{2qm}{q+m}, \qquad b=\frac{2mn}{m+n}, \qquad c=\frac{2np}{n+p}.$$

Afixele punctelor E şi F, mijloacele diagonalelor $[AC]$, respectiv $[BD]$, se exprimă astfel:

$$e=\frac{a+c}{2}=\frac{mnq+mpq+mnp+npq}{(m+q)(n+p)}=\frac{x}{(m+n)(p+q)} \quad \text{şi}$$

$$f=\frac{b+d}{2}=\frac{mnp+mnq+mpq+npq}{(m+n)(p+q)}=\frac{x}{(m+q)(p+q)}.$$

Propoziţia 6.1.8. prezentată la pagina 113 a aceleiaşi lucrări [1], afirmă că punctele $E(e)$ şi $F(f)$, distincte şi diferite de $I(i)$ sunt coliniare dacă şi numai dacă $e\times f=0$ (unde prin „$\times$" s-a notat produsul complex al numerelor e şi f). Utilizând definiţia produsului complex avem:

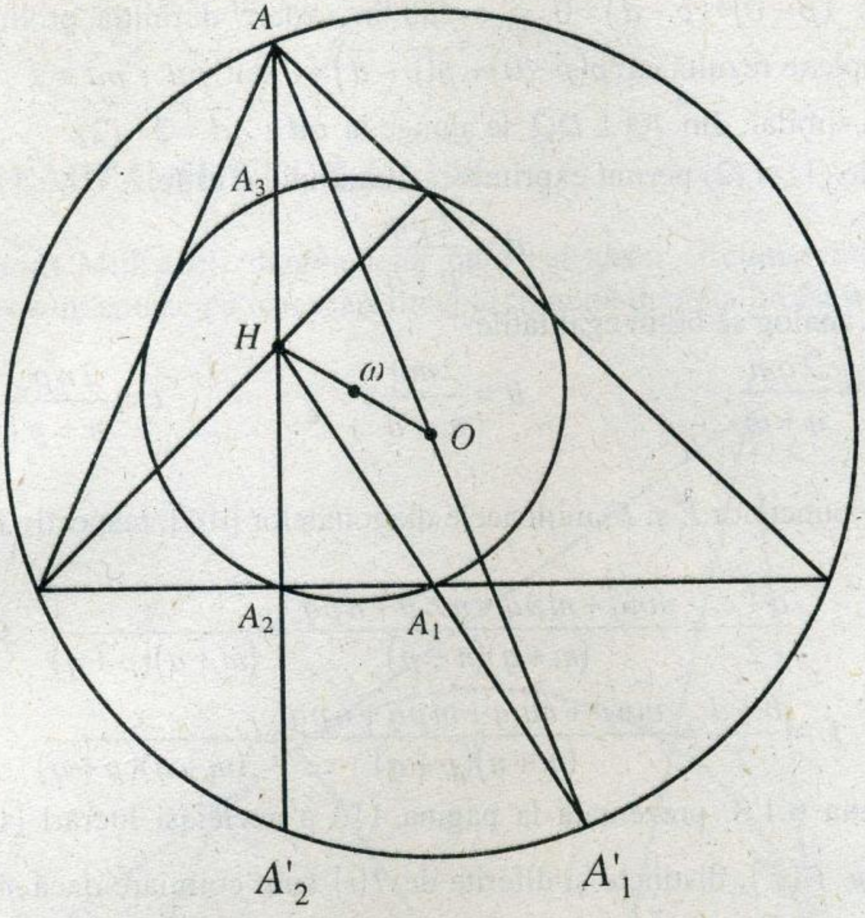
$$e\times f=\frac{1}{2}\left(\overline{e}f-e\overline{f}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{|x|^2}{(\overline{m}+\overline{q})(\overline{p}+\overline{q})(m+n)(p+q)}-\frac{|x|^2}{(m+q)(p+q)(\overline{m}+\overline{n})(\overline{p}+\overline{q})}\right]=0$$

Deci punctele E, I, F sunt coliniare.

3. CERCUL CELOR NOUĂ PUNCTE

Teoremă: Mijloacele laturilor unui triunghi, picioarele înălţimilor şi mijloacele segmentelor care unesc fiecare vârf cu ortocentrul triunghiului se găsesc pe acelaşi cerc (cercul celor nouă puncte).

Demonstraţie: Fie A_1 mijlocul laturii BC, A_2 piciorul înălţimii din A şi A_3 mijlocul segmentului AH. Se ştie că simetricele ortocentrului faţă de laturi şi faţă de mijloacele laturilor se găsesc pe cercul circumscris triunghiului. Fie A'_1 şi A'_2 simetricele ortocentrului H faţă de mijlocul A_1 al laturii BC, respectiv faţă de latura BC.



Considerând omotetia $h_{H,\frac{1}{2}}$, avem:

$$h_{H,\frac{1}{2}}(A'_1)=A_1, \qquad h_{H,\frac{1}{2}}(A'_2)=A_2, \qquad h_{H,\frac{1}{2}}(A'_3)=A_3 .$$

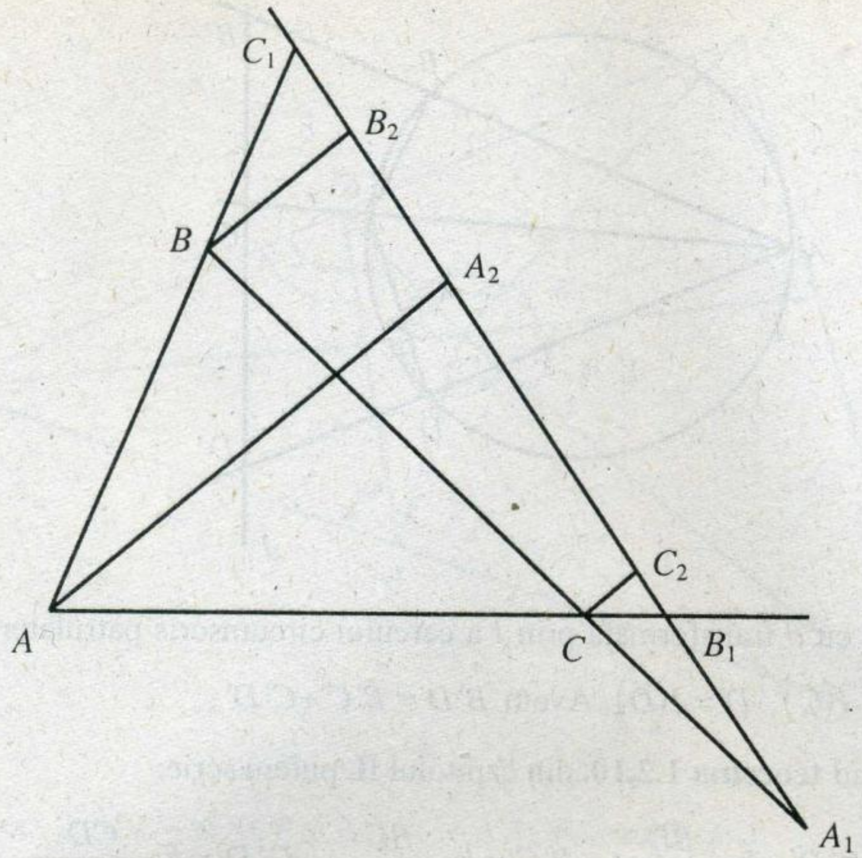
Rezultă că punctele A_1, A_2, A_3 sunt situate pe un cerc, omoteticul cercului circumscris triunghiului ABC. Acest cerc are centrul ω, în mijlocul segmentului HO, şi are raza de lungime egală cu jumătate din lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC. Analog, se demonstrează că celelalte şase puncte B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 se află pe acelaşi cerc, numit cercul celor nouă puncte sau cercul lui Euler.

4. TEOREMA LUI MENELAUS

Teoremă: Dacă o transversală intersectează dreptele AB, BC, AC, care conţin laturile (AB), (BC), (AC) ale triunghiului ABC în punctele A_1, B_1, respectiv C_1, atunci are loc relaţia:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=1.$$

Demonstraţie: Fie t o transversală care intersectează dreptele AB, BC, AC, care conţin laturile triunghiului ABC în punctele A_1, B_1, C_1.



Construim semidreptele paralele $(AA_2$, $(BB_2$, $(CC_2$, care intersectează transversala t în punctele A_2, B_2, C_2. Rezultă că $[AA_2]$, $[BB_2]$, $[CC_2]$ sunt segmente paralele. Considerăm trei omotetii: h_{A_1,k_1} care transformă pe B în C, h_{B_1,k_2} care transformă pe C în A şi h_{C_1,k_3} care transformă pe A în B. Prin urmare:

$$\frac{A_1B}{A_1C}=k_1,\ \frac{B_1C}{B_1A}=k_2,\ \frac{C_1A}{C_1B}=k_3.$$

Rezultă că $h_{A_1,k_1}(B_2)=C_2$, $h_{B_1,k_2}(C_2)=A_2$, $h_{C_1,k_3}(A_2)=B_2$ şi

$$\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{BB_2}{CC_2},\ \frac{B_1C}{B_1A}=\frac{CC_2}{AA_2},\ \frac{C_1A}{C_1B}=\frac{AA_2}{BB_2}.$$

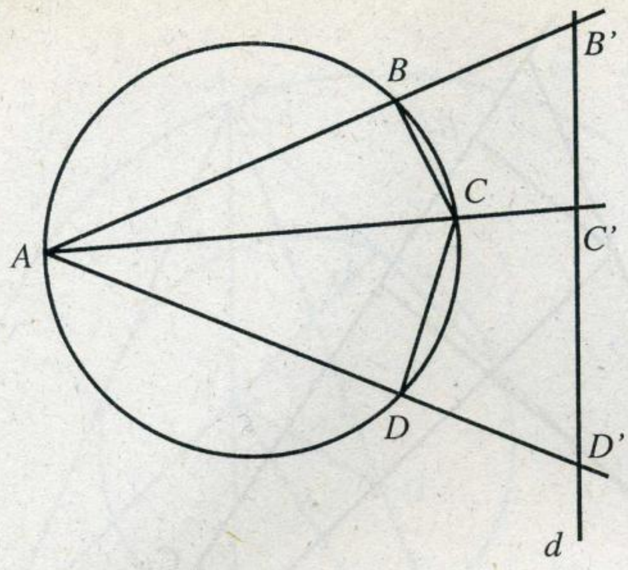
Înmulţind membru cu membru aceste ultime trei egalităţi obţinem relaţia din enunţ.

5. PRIMA TEOREMĂ A LUI PTOLEMEU

***Teoremă*:** Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Atunci are loc egalitatea:

$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC.$$

Demonstraţie: Considerăm o inversiune I de pol A şi putere k.



Notăm cu d transformata prin I a cercului circumscris patrulaterului $ABCD$ şi $B'=I(B)$, $C'=I(C)$, $D'=I(D)$. Avem $B'D'=B'C'+C'D'$.

Folosind **teorema 1.2.10.** din capitolul II, putem scrie:

$$B'D'=k\frac{BD}{AB\cdot AD},\ B'C'=k\frac{BC}{AB\cdot AC},\ C'D'=k\frac{CD}{AC\cdot AD}.$$

Utilizând aceste trei egalităţi, identitatea anterioară se scrie:

$$k\frac{BD}{AB\cdot AD}=k\frac{BC}{AB\cdot AC}+k\frac{CD}{AC\cdot AD},$$

de unde:

$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC.$$

6. TEOREMA LUI BRETSCHNEIDER
(sau teorema întâi a lui Ptolemeu generalizată)

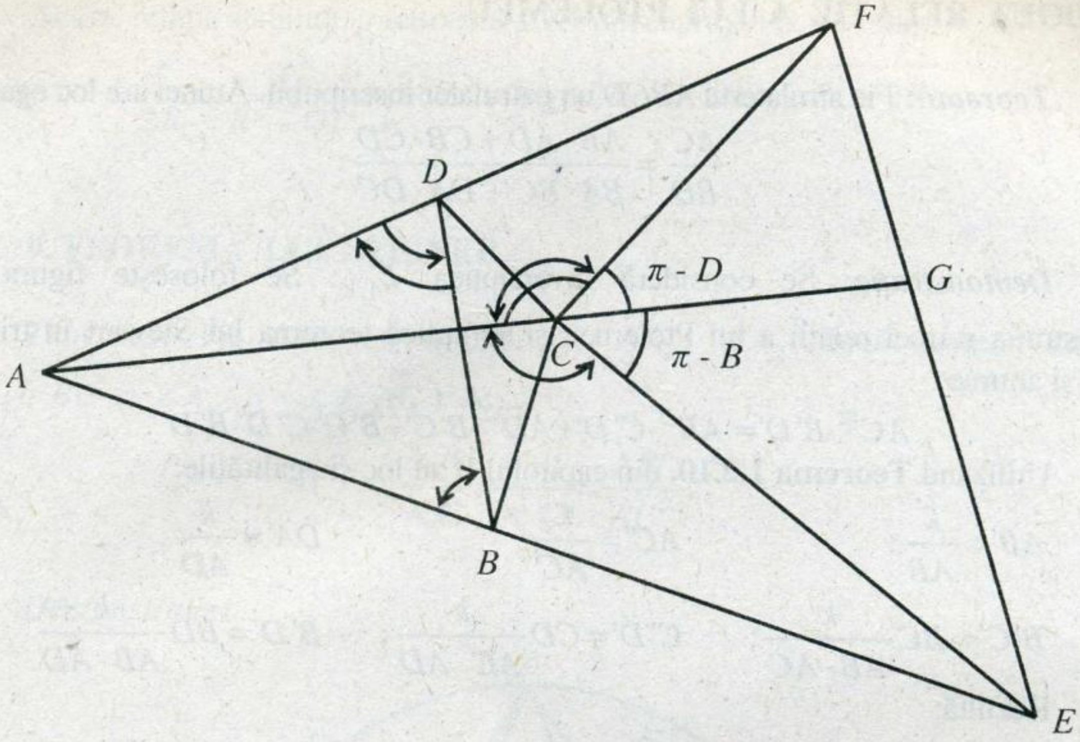
***Teoremă*:** Într-un patrulater $ABCD$ are loc egalitatea:

$$AC^2\cdot BD^2=AB^2\cdot CD^2+BC^2\cdot AD^2-2AB\cdot CD\cdot CD\cdot DA\cos(B+D)$$

Demonstraţie: Considerăm inversiunea i_{a,AC^2} de pol $A(a)$ şi putere AC^2.

Este clar că $i_{a,AC^2}(C)=a+\frac{AC^2}{\overline{c-a}}=a+\frac{|c-a|^2}{\overline{c-a}}=a+c-a=c$.

Considerăm cazul $m\left(\hat{B}\right)+m\left(\hat{C}\right)<\pi$, cazul $m\left(\hat{B}\right)+m\left(\hat{C}\right)>\pi$ tratându-se analog.



Deoarece $\Delta ABC \sim \Delta ACE$ şi $\Delta ADC \sim \Delta ACF$, rezultă că:

$m\left(\widehat{ECG}\right) = \pi - B$ şi $m\left(\widehat{ECF}\right) = \pi - D$, deci $m\left(\widehat{ECF}\right) = 2\pi - (B + D)$.

Teorema cosinusului aplicată în triunghiul ECF conduce la:

$$EF^2 = CF^2 + CE^2 - 2CE \cdot CF \cos(B + D).$$

Folosind **Teorema 1.2.10.** din capitolul II avem:

$$CF = \frac{AC \cdot CD}{AD},\ CE = \frac{AC \cdot BC}{AB},\ EF = \frac{AC^2 \cdot BD}{AB \cdot AD}.$$

După aducerea la acelaşi numitor şi simplificarea prin factorul nenul AC^2 se obţine egalitatea din enunţ.

Observaţie: Teorema este valabilă şi într-un patrulater concav, deşi am ilustrat demonstraţia folosind un patrulater convex.

Consecinţa 1. În patrulaterul $ABCD$ au loc inegalităţile:

$$\left|AB \cdot CD - BC \cdot AD\right| < AC \cdot BD \leq AB \cdot CD - BC \cdot AD.$$

Demonstraţie: Deoarece $1 < \cos(B + D) \leq -1$, se ajunge imediat din relaţia din relaţia lui Bretschneider la inegalitatea din această consecinţă.

Consecinţa 2. Patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil dacă şi numai dacă suma produselor laturilor opuse este egală cu produsul diagonalelor, adică:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

7. A DOUA RELAȚIE A LUI PTOLEMEU

***Teoremă*:** Fie atrulaterul $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Atunci are loc egalitatea:

$$\frac{AC}{BD}=\frac{AB\cdot AD+CB\cdot CD}{BA\cdot BC+DA\cdot DC}.$$

Demonstrație: Se consideră inversiunea $I_{A,k}$. Se folosește figura de la demonstrația primei relații a lui Ptolemeu și se aplică teorema lui Stewart în triunghiul $AB'C'$ și anume:

$$AC'^2\cdot B'D'=AB'^2\cdot C'D'+AD'^2\cdot B'C'-B'C'\cdot C'D'\cdot B'D'.$$

Utilizând **Teorema 1.2.10.** din capitolul II au loc și egalitățile:

$$AB'=\frac{k}{AB};\qquad AC'=\frac{k}{AC};\qquad DA'=\frac{k}{AD};$$

$$B'C'=BC\frac{k}{AB\cdot AC};\qquad C'D'=CD\frac{k}{AC\cdot AD};\qquad B'D'=BD\frac{k}{AB\cdot AD}$$

Rezultă:

$$\frac{k^2}{AC^2}\cdot BD\cdot\frac{k}{AB\cdot AD}=\frac{k^2}{AB^2}\cdot CD\cdot\frac{k}{AC\cdot AD}+\frac{k^2}{AD^2}\cdot BC\cdot\frac{k}{AB\cdot AC}-$$

$$-\frac{k^3\cdot BD\cdot BC\cdot CD}{AB\cdot AD\cdot AB\cdot AC\cdot AC\cdot AD}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow BD\cdot AB\cdot AD=AC\cdot CD\cdot AD+BC\cdot AB\cdot AC-BD\cdot BC\cdot CD\Rightarrow$$

$$\Rightarrow BD(AB\cdot AD+BC\cdot CD)=AC(AB\cdot BC+AD\cdot CD)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{AC}{BD}=\frac{AB\cdot AD+CB\cdot CD}{BA\cdot BC+DA\cdot DC}.$$

8. RELAȚIA LUI EULER

***Teoremă*:** În orice triunghi ABC are loc următoarea relație:

$$OI=\sqrt{R^2-2Rr},$$

numită relația lui Euler. (notațiile sunt cele cunoscute)

Demonstrație: Fie i_{I,r^2} inversiunea de pol I și putere r^2.

Notăm $\{D\}=AI\cap BC$, $\{E\}=BI\cap AC$, $\{F\}=CI\cap AB$. Cercurile de diametre ID, IE, IF, se transformă prin i_{I,r^2} în dreptele BC, CA, respectiv AB. Rezultă că $i_{I,r^2}(A)=A'$, $i_{I,r^2}(B)=B'$, $i_{I,r^2}(C)=C'$, unde A', B', C' sunt punctele de intersecție, diferite de I, ale cercurilor de diametre ID, IE, IF. Cercul $\mathscr{C}$, circumscris triunghiului ABC se transformă prin i_{I,r^2} în cercul ω circumscris triunghiului $A'B'C'$. Conform problemei piesei de 5 lei a lui G. Țițeica, rezultă că raza cercului ω este $\frac{r}{2}$.

Acum, relația stabilită în **teorema 1.2.9** din capitolul II, se scrie:

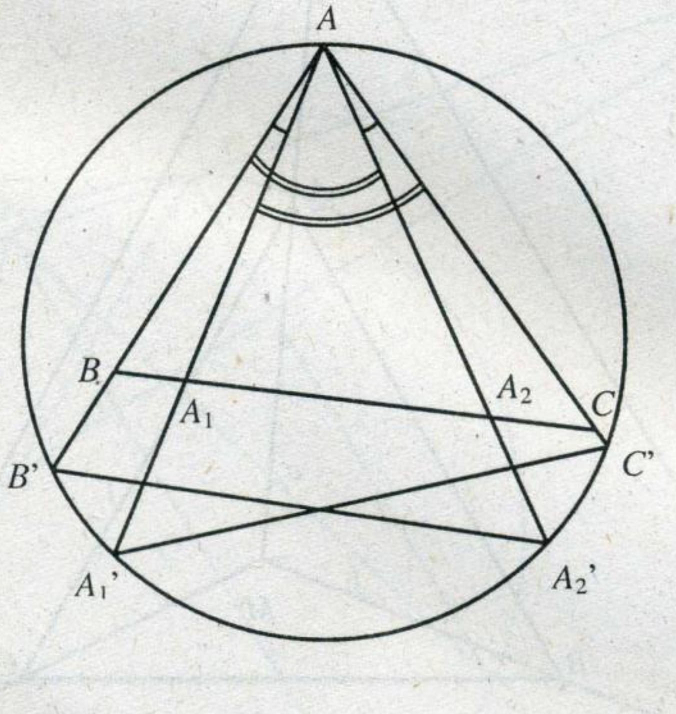
$$\frac{r}{2R}=\frac{r^2}{R^2-OI^2}\Rightarrow OI^2=R^2-2Rr\Rightarrow OI=\sqrt{R^2-2Rr}\,.$$

9. TEOREMA LUI STEINER

***Teoremă*:** Fie ABC un triunghi și AA_1, AA_2 două ceviene izogonale ($A_2, A_1 \in BC$ și $\angle A_1AB \equiv \angle A_2AC$). Atunci:

$$\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{A_2B}{A_2C}=\frac{AB^2}{AC^2}\,.$$

Demonstrație:



Fie inversiunea $i_{A,k}$ și $B'=i_{A,k}(B)$, $C'=i_{A,k}(C)$, $A'_1=i_{A,k}(A_1)$, $A'_2=I_{A,k}(A_2)$.

$m(\angle BAA_1)=m(\angle CAA_2)$ și $m(\angle BAA_2)=m(\angle CAA_1)\Rightarrow B'A'_1\equiv C'A'_2$ și

$B'A'_2\equiv C'A'_1$ (la arce congruente corespund coarde congruente).

Prin urmare:

$$\frac{k\cdot BA_1}{AB\cdot AA_1}=\frac{k\cdot A_2C}{AA_2\cdot AC},\ \frac{k\cdot BA_2}{AB\cdot AA_2}=\frac{k\cdot A_1C}{AA_1\cdot AC}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{BA_1\cdot BA_2}{AB^2\cdot AA_1\cdot AA_2}=\frac{CA_1\cdot CA_2}{AC^2\cdot AA_1\cdot AA_2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{A_1B\cdot A_2B}{A_1C\cdot A_2C}=\frac{AB^2}{AC^2}\,.$$

10. TEOREMA LUI DIMIRIE POMPEIU

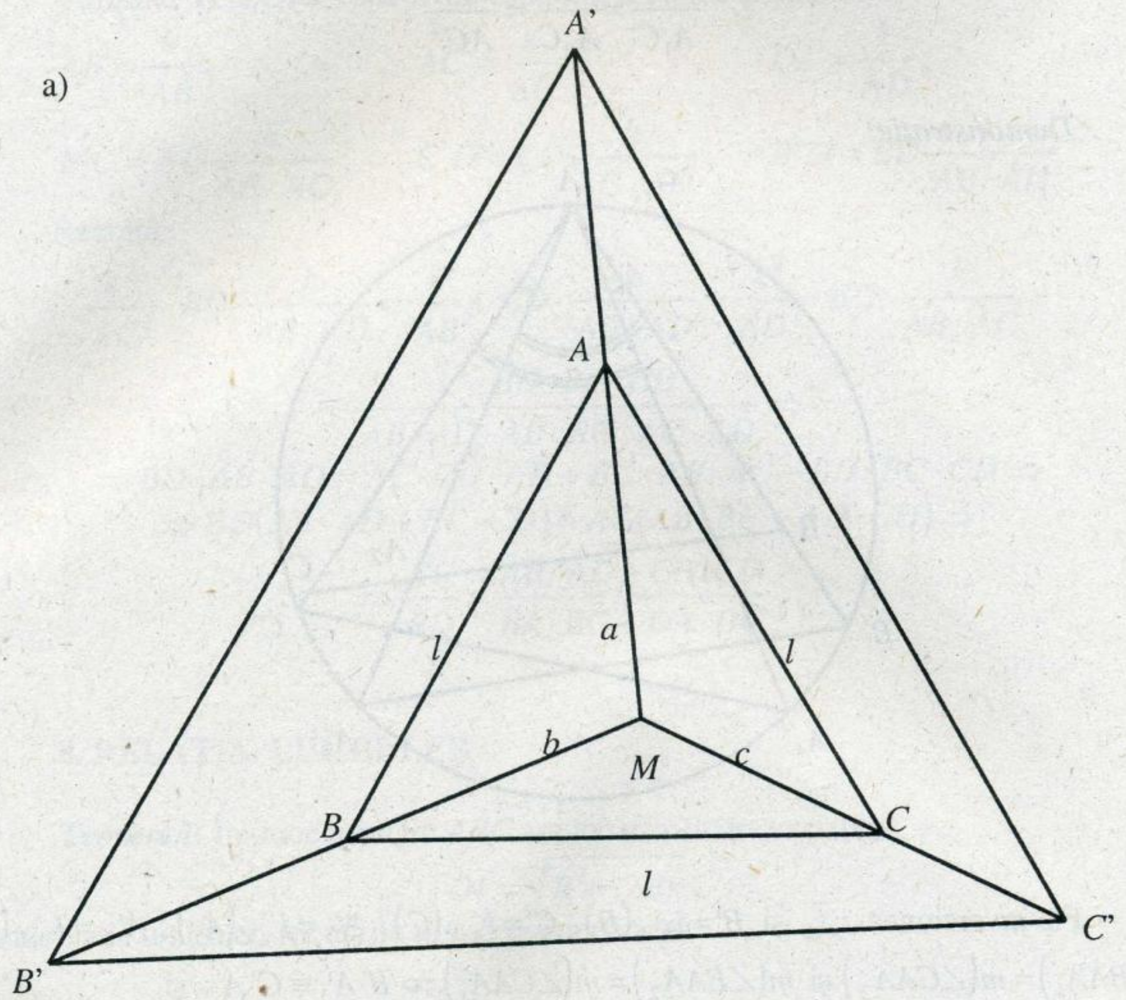
***Teoremă*:** Fie ABC un triunghi echilateral şi M un punct în planul triunghiului. Să se demonstreze că:

a) Dacă M nu aparţine cercului circumscris triunghiului ABC, atunci există un triunghi cu laturile congruente cu segmentele MA, MB şi MC.

b) Dacă M aparţine cercului circumscris triunghiului ABC, atunci lungimea unuia dintre segmentele MA, MB şi MC este egală cu suma lungimilor celorlalte două.

Demonstraţie:

a)



Fie inversiunea $i_{M,k}$, $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ şi $A' = i_{M,k}(A)$, $B' = i_{M,k}(B)$, $C' = i_{M,k}(C)$.

Notăm cu a, b, c lungimile segmentelor MA, MB şi MC şi cu l lungimea laturilor triunghiului echilateral ABC. Deoarece punctul M nu este situat pe cercul circumscris triunghiului ABC, punctele A', B', C' nu sunt coliniare.

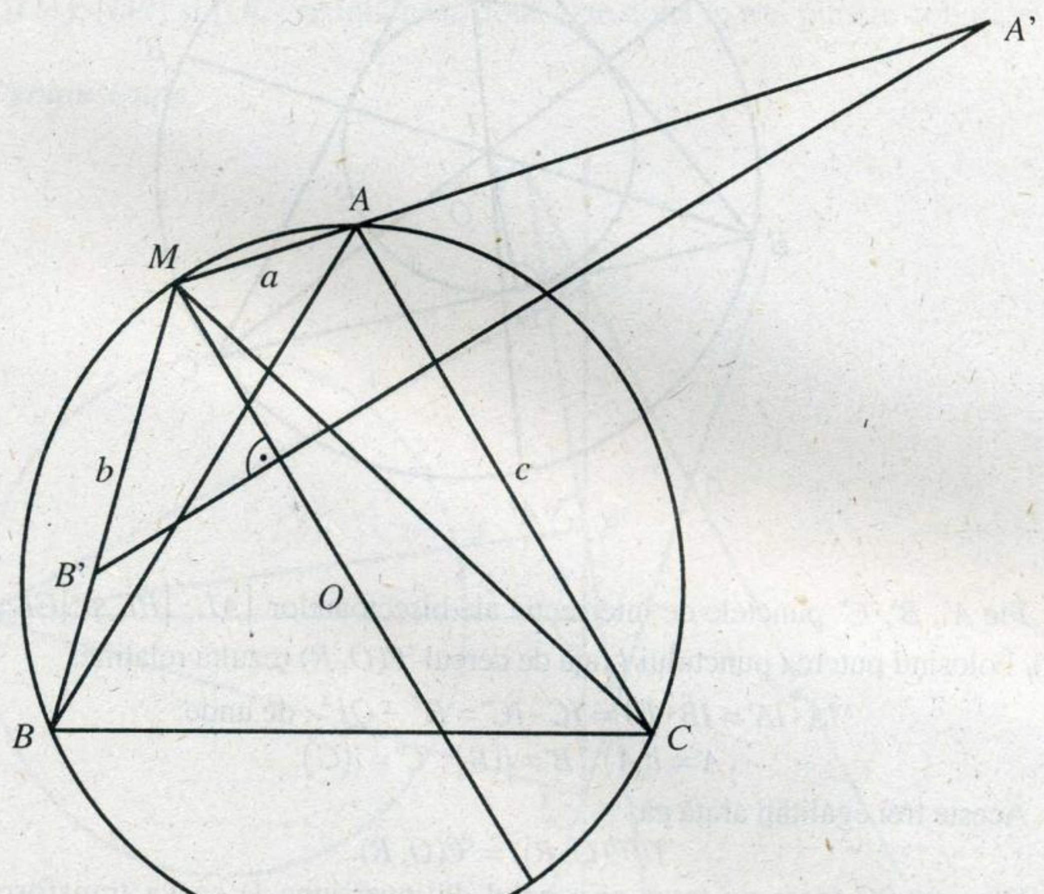
$$A'B' = AB \cdot \frac{k}{ab} = l \cdot \frac{k}{ab} = \frac{c \cdot l \cdot k}{abc}.$$

Analog, $B'C' = \dfrac{a \cdot l \cdot k}{abc}$ şi $C'A' = \dfrac{b \cdot l \cdot k}{abc}$. Rezultă:

$$\frac{a}{B'C'} = \frac{b}{C'A'} = \frac{c}{A'B'} = \frac{abc}{l \cdot k}.$$

Prin urmare, lungimile segmentelor MA, MB şi MC sunt proporţionale cu lungimile laturilor triunghiului $A'B'C'$. Aşadar segmentele MA, MB şi MC pot forma un triunghi asemenea cu triunghiul $A'B'C'$.

b)



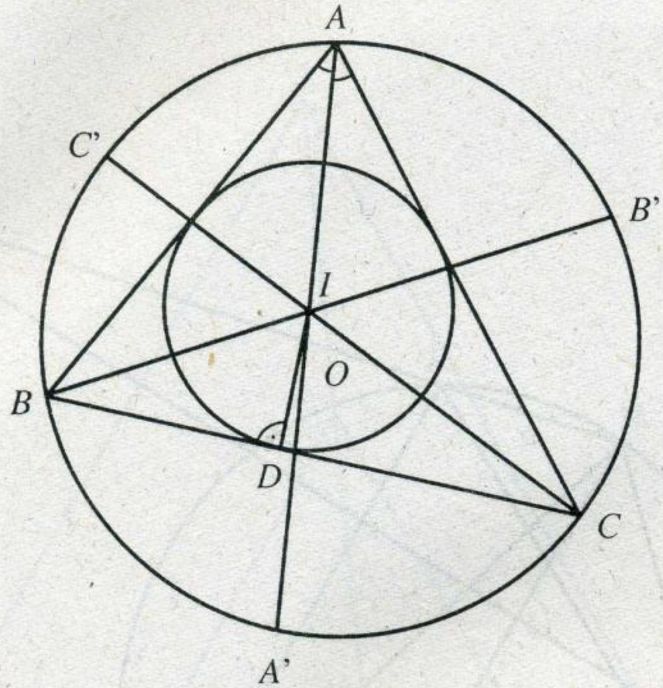
Dacă M aparţine cercului circumscris triunghiului ABC, atunci prin aceeaşi inversiune $i_{M,k}$, punctele A, B, C se transformă în punctele A', B', C' situate pe o dreaptă (perpendiculară pe diametrul ce trece prin M). Avem:

$$A'B' = B'C' + C'A' \Leftrightarrow AB \cdot \frac{k}{ab} = BC \cdot \frac{k}{bc} + CA \cdot \frac{k}{ca} \Leftrightarrow c = a + b.$$

11. TEOREMA LUI ȚIȚEICA

***Teoremă*:** Trei cercuri având razele egale se intersectează într-un punct. Luându-le două câte două se obțin încă trei puncte de intersecție. Cercul determinat de aceste trei puncte are raza egală cu raza cercurilor date.

Demonstrație: Se consideră un triunghi ABC. Fie $\mathscr{C}(I, r)$, respectiv $\mathscr{C}(O, R)$, cercul înscris, respectiv circumscris triunghiului ABC. Se consideră înversiunea $i_{I, -R^2+OI^2}$. Cercul $\mathscr{C}(O, R)$ se va transforma prin i tot într-un cerc.



Fie A', B', C' punctele de intersecție ale bisectoarelor $[AI$, $[BI$ și $[CI$ cu cercul $\mathscr{C}(O, R)$. Folosind puterea punctului I față de cercul $\mathscr{C}(O, R)$ rezultă relațiile:

$$IA \cdot IA' = IB \cdot IB' = IC \cdot IC' = R^2 - OI^2 \text{, de unde:}$$
$$A' = i(A),\ B' = i(B),\ C' = i(C).$$

Aceste trei egalități arată că:

$$T(\mathscr{C}(O, R)) = \mathscr{C}(O, R).$$

Dreapta BC (care nu trece prin polul de inversiune I) se va transforma prin i într-un cerc care trece prin punctele I, B', C', astfel încât tangenta în I la acest cerc este paralelă cu BC. Fie D punctul de contact al cercului înscris cu latura $[BC]$. Deoarece $ID \perp BC$, rezultă că $D' = i(D)$ va fi punctul diametral opus lui I în cercul circumscris triunghiului $IB'C'$. Atunci:

$$ID \cdot ID' = R^2 - OI^2.$$

Dacă se notează cu $2R_1$ lungimea diametrului $[ID']$, atunci, ultima egalitate se scrie:

$$r \cdot 2R_1 = R^2 - OI^2.$$

Din această egalitate şi din egalitatea lui Euler în triunghiul ABC, $OI^2 = R^2 - 2rR$, se obține:

$$R_1 = R.$$

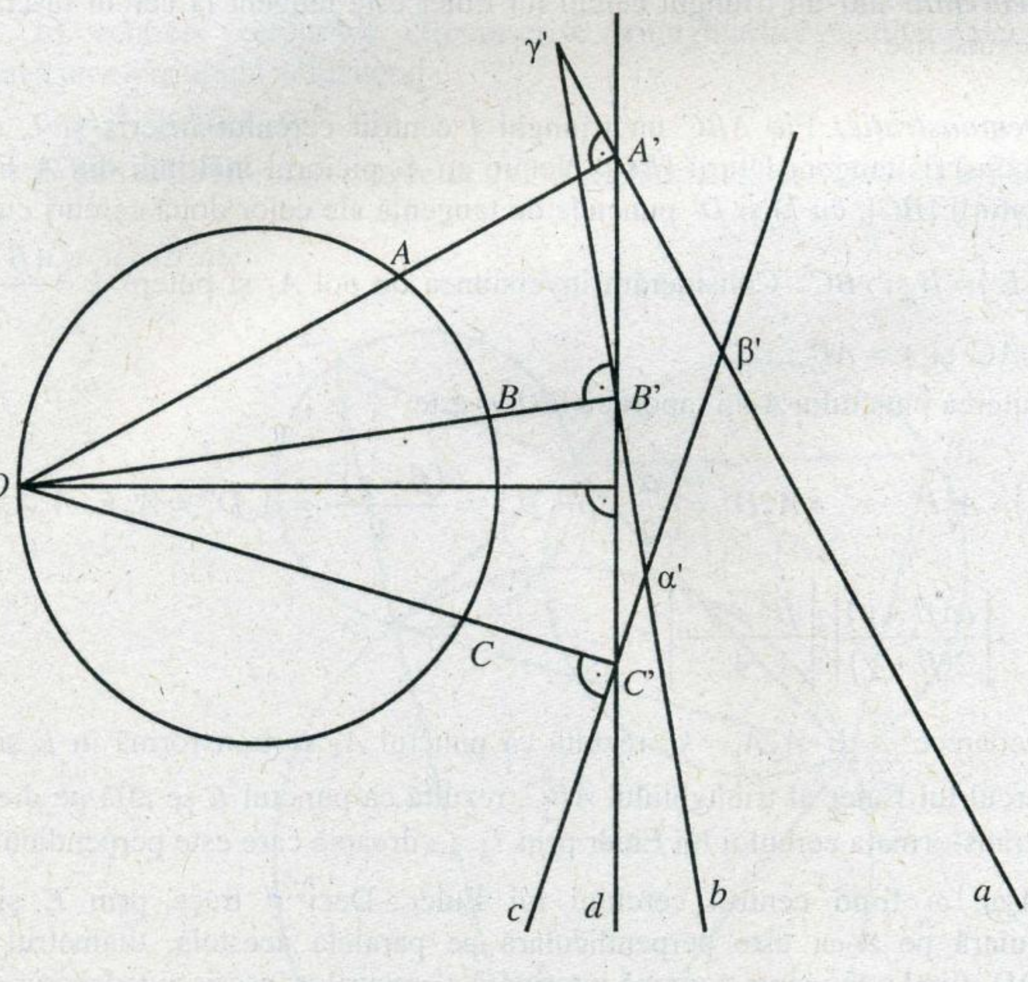
Repetând raționamentul pentru dreptele CA şi AB se constată că prin inversiunea i se obțin alte două cercuri având razele egale cu R.

În concluzie, s-au obținut trei cercuri de raze egale cu R care trec prin punctul I şi care se mai intersectează două câte două în punctele A', B', C'. Cercul circumscris triunghiului $A'B'C'$ are raza egală cu R.

12. TEOREMA LUI SALMON

Teoremă: Dacă punctele O, A, B, C sunt pe acelaşi cerc, atunci cercurile de diametre $[OA]$, $[OB]$ şi $[OC]$ se întâlnesc două câte două în trei puncte coliniare.

Demonstrație:



Se consideră inversiunea $i(O, k)$, k arbitrar. Cercul circumscris patrulaterului $OABC$ se va transforma într-o dreaptă d perpendiculară pe diametrul ce trece prin pol. Dacă se notează $A' = i(A)$, $B' = i(B)$, $C' = i(C)$, atunci A', B', $C' \in d$. Prin inversiunea considerată cercul de diametru $[OA]$ se transformă într-o dreaptă a (evident $a \perp OA$).

Cercul de diametru $[OB]$ se transformă într-o dreaptă $b \perp OB$, iar cercul de diametru $[OC]$ se transformă într-o dreaptă $c \perp OC$.

Fie α, β, respectiv γ punctele de intersecție ale cercurilor de diametre $[OC]$ și $[OB]$, $[OA]$ și $[OC]$, respectiv $[OA]$ și $[OB]$. Se notează $\alpha' = i(\alpha)$, $\beta' = i(\beta)$, $\gamma' = i(\gamma)$. Este evident că:

$$\{\alpha'\} = b \cap c,\ \{\beta'\} = c \cap a,\ \{\gamma'\} = a \cap b.$$

Deoarece punctele $A' = pr_{\beta'\gamma'} A$, $B' = pr_{\alpha'\gamma'} B$, $C' = pr_{\alpha'\beta'} C$ sunt coliniare, rezultă, conform reciprocei teoremei lui Simpson, că punctul O se află pe cercul circumscris triunghiului $\alpha'\beta'\gamma'$. Deoarece cercul circumscris triunghiului $\alpha'\beta'\gamma'$ trece prin polul O, rezultă că el (mai puțin polul O) se va transforma, prin inversiunea considerată, într-o dreaptă d_1. Este evident că punctele $\alpha = i(\alpha')$, $\beta = i(\beta')$, $\gamma = i(\gamma')$ aparțin dreaptei d_1.

13. TEOREMA LUI FEUERBACH

Teoremă: Într-un triunghi cercul lui Euler este tangent la cercul înscris și la cercurile exînscrise.

Demonstrație: Fie ABC un triunghi I centrul cercului înscris și I_a centrul cercului exînscris tangent laturii $[BC]$. Notăm cu A_1 piciorul înălțimii din A și cu A_2 mijlocul laturii $[BC]$, cu D și D' punctele de tangență ale celor două cercuri cu latura $[BC]$ și $\{E\} = II_a \cap BC$. Considerăm inversiunea de pol A_2 și putere $k = \dfrac{(\beta-\gamma)^2}{4}$, unde $\beta = AC$ și $\gamma = AB$.

Puterea punctului A_2 în raport cu $\mathscr{C}(I, r)$ este:

$$\rho(A_2) = A_2I^2 - r^2 = A_2D^2 = \left(\frac{\alpha}{2} - p + \beta\right)^2 = \frac{(\beta-\gamma)^2}{4} = A_2D'^2 = A_2E \cdot A_2A_1 =$$

$$= \left|\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{2(\beta+\gamma)}\right| \cdot \left|\frac{\beta^2-\gamma^2}{4}\right| = k.$$

Deoarece $A_2E \cdot A_2A_1 = k$, rezultă că punctul A_2 se transformă în E și A_1 se află pe cercul lui Euler al triunghiului ABC, rezultă că punctul E se află pe dreapta d care este transformata cercului lui Euler prin $i_{A_2,k}$, dreaptă care este perpendiculară pe dreapta $A_2\omega$, ω fiind centrul cercului lui Euler. Deci d trece prin E și fiind perpendiculară pe $A_2\omega$, este perpendiculară pe paralela acesteia, diametrul $[AO]$. Dreapta DD' fiind o tangentă comună interioară a cercurilor înscris și exînscris, a doua tangentă înterioară FF' trebuie să treacă prin punctul de intersecție al dreptei DD' cu dreapta centrelor II_a, deci prin E. În acelaşi timp FF' și DD' fac unghiuri congruente cu II_a, de unde rezultă că sunt antiparalele în A și deci dreapta FF' este perpendiculară pe AO. Rezultă că $d = FF'$. Deci tansformata cercului lui Euler prin

$i_{A_2,k}$ este dreapta FF' şi cum această dreaptă este tangentă cercurilor înscris şi exînscris triunghiului în punctele F, respectiv F', cercul lui Euler este de asemenea tangent la cercurile înscris şi exînscris în punctele F_1, respectiv F_1', transformatele punctelor F şi F' prin inversiunea $i_{A_2,k}$.

Analog se arată, prin inversiuni având polurile în mijloacele laturilor [AC] şi [AB] şi modulele $(a-c)^2$, respectiv $(a-b)^2$, că cercul lui Euler este tangent cercurilor exînscrise tangente la laturile [AC] şi [AB].

14. TEOREMA LUI NAPOLEON-TORICELLI-FERMAT

Fie un triunghi ABC oarecare şi ABC_1, BA_1C, CB_1A trei triunghiuri echilaterale construite în exteriorul triunghiului ABC. Să se arate că:

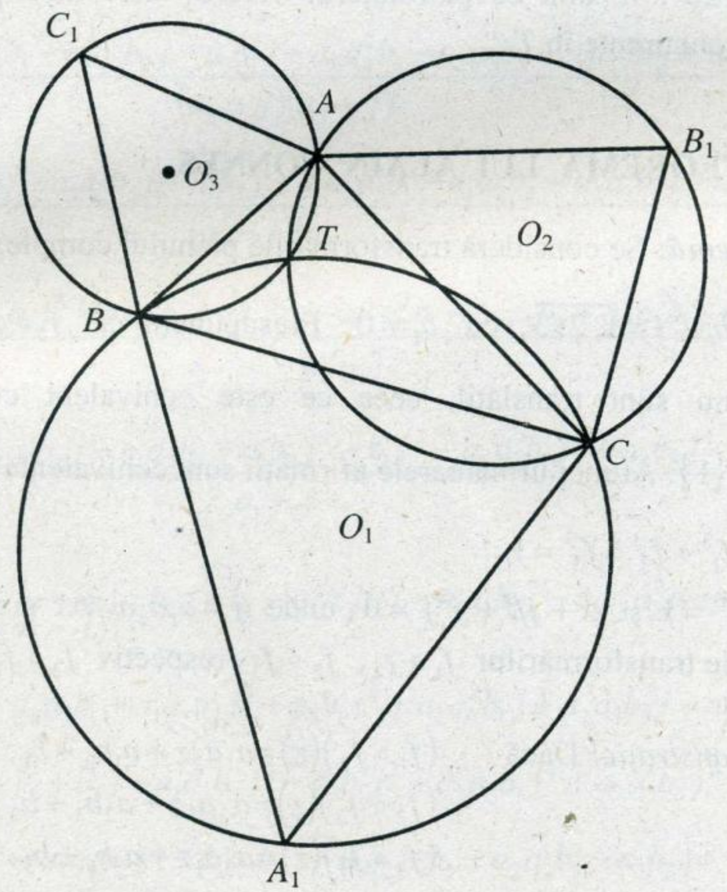
a) $AA_1 = BB_1 = CC_1$

b) centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor echilaterale construite formează un alt triunghi echilateral

c) $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 \neq \emptyset$

d) cercurile circumscrise celor trei triunghiuri echilaterale sunt concurente

Demonstraţie:



Considerăm că triunghiul ABC are toate unghiurile strict mai mici decât 120°, celelalte cazuri tratându-se fără dificultate.

a) Rotația $r_{A,60^\circ}$ duce pe C în B_1, iar pe C_1 în B. Aşadar, $CC_1 = BB_1$ şi analoagele.

b) Afixele punctelor A_1, B_1, C_1 obținute prin rotații sunt:

$$a_1 = c + (b-c)\varepsilon,\ b_1 = a + (c-a)\varepsilon,\ c_1 = b + (a-b)\varepsilon.$$

Notând cu O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor A_1BC, AB_1C, ABC_1, avem:

$$z_{O_1} = \frac{b+2c+(b-c)\varepsilon}{3},\ z_{O_2} = \frac{2a+c+(c-a)\varepsilon}{3},\ z_{O_3} = \frac{a+2b+(a-b)\varepsilon}{3},$$

unde $\varepsilon = \cos 60^\circ + i\sin 60^\circ$.

Deoarece $z_{O_1} = z_{O_2} + (z_{O_3} - z_{O_2})\cdot\varepsilon$, rezultă că triunghiul $O_1O_2O_3$ este echilateral.

$$\angle(B_1B, AA_1) = \arg\frac{a_1 - a}{b - b_1} = \arg\frac{c+(b-c)\varepsilon - a}{(b-a)-(c-a)\varepsilon} = \arg\varepsilon = 60^\circ.$$

Notăm $\{T\} = B_1B \cap AA_1$. Deoarece $m(\angle ATB_1) = m(\angle ACB_1)$, rezultă că patrulaterul $ATCB_1$ este inscriptibil. Analog, patrulaterul $CTBA_1$ este inscriptibil. Deci punctul T se află la intersecția cercurilor circumscrise triunghiurilor ACB_1 şi CBA_1.

Dar $m(\angle ATB) = 180^\circ - m(\angle AB_1C) = 120^\circ$ şi $m(\angle BTC) = 120^\circ$, rezultă $m(\angle ATB) = 120^\circ$, rezultă că patrulaterul $ATBC_1$ este inscriptibil şi deci cele trei cercuri sunt concurente în T.

15. TEOREMA LUI ALAIN CONNES

Teoremă: Se consideră transformările planului complex de forma $f_i : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f_i(z) = a_i z + b_i$, $i = \overline{1,2,3}$, cu $a_i \neq 0$. Presupunem că $f_1 \circ f_2$, $f_2 \circ f_3$, $f_3 \circ f_1$ şi $f_1 \circ f_2 \circ f_3$ nu sunt translații, ceea ce este echivalent cu a_1a_2, a_2a_3, a_3a_1, $a_1a_2a_3 \in \mathbf{C} - \{1\}$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

(1) $f_1^3 \circ f_2^3 \circ f_3^3 = 1_{\mathbf{C}}$;

(2) $j^3 = 1$ şi $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$, unde $j = a_1a_2a_3 \neq 1$ şi α, β, γ sunt unicele puncte fixe ale transformărilor $f_1 \circ f_2$, $f_2 \circ f_3$, respectiv $f_3 \circ f_1$.

Demonstrație: Dacă

$$(f_1 \circ f_2)(z) = a_1a_2z + a_1b_2 + b_1,\ a_1a_2 \neq 1$$
$$(f_2 \circ f_3)(z) = a_2a_3z + a_2b_3 + b_2,\ a_2a_3 \neq 1$$
$$(f_3 \circ f_1)(z) = a_3a_1z + a_3b_1 + b_3,\ a_3a_1 \neq 1,$$

atunci $\alpha = \dfrac{a_1 b_2 + b_1}{1 - a_1 a_2} = \dfrac{a_1 a_3 b_2 + a_3 b_1}{a_3 - j}$, $\quad \beta = \dfrac{a_2 b_3 + b_2}{1 - a_1 a_2} = \dfrac{a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2}{a_1 - j}$,

$$\gamma = \frac{a_3 b_1 + b_3}{1 - a_3 a_1} = \frac{a_2 a_3 b_1 + a_2 b_3}{a_2 - j}.$$

Pentru cuburile transformărilor f_1, f_2, f_3 avem formulele:

$$f_1^3(z) = a_1^3 z + b_1\left(a_1^2 + a_1 + 1\right), \qquad f_2^3(z) = a_2^3 z + b_2\left(a_2^2 + a_2 + 1\right)$$
$$f_3^3(z) = a_3^3 z + b_3\left(a_3^2 + a_3 + 1\right),$$

deci:

$$\left(f_1^3 \circ f_2^3 \circ f_3^3\right)(z) = a_1^3 a_2^3 a_3^3 z + a_1^3 a_2^3 b_3\left(a_3^2 + a_3 + 1\right) + a_1^3 b_2\left(a_2^2 + a_2 + 1\right) + b_1\left(a_1^2 + a_1 + 1\right).$$

Aşadar, $f_1^3 \circ f_2^3 \circ f_3^3 = 1_{\mathbb{C}}$ dacă şi numai dacă $a_1^3 a_2^3 a_3^3 = 1$ şi

$$a_1^3 a_2^3 b_3\left(a_3^2 + a_3 + 1\right) + a_1^3 b_2\left(a_2^2 + a_2 + 1\right) + b_1\left(a_1^2 + a_1 + 1\right) = 0.$$

Pentru a demonstra echivalența afirmațiilor (1) şi (2) trebuie să arătăm că $\alpha + j\beta + j^2\gamma$ este diferit de termenul liber al lui $f_1^3 \circ f_2^3 \circ f_3^3$

Într-adevăr, folosind relația $j^3 = 1$ şi implicit $j^2 + j + 1 = 0$, putem scrie succesiv egalitățile:

$$\alpha + j\beta + j^2\gamma = \alpha + j\beta + (-1 - j)\gamma = \alpha - \gamma + j(\beta - \gamma) =$$

$$= \frac{a_1 a_3 b_2 + a_3 b_1}{a_3 - j} - \frac{a_2 a_3 b_1 + a_2 b_3}{a_2 - j} + j\left(\frac{a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2}{a_1 - j} - \frac{a_2 a_3 b_1 + a_2 b_3}{a_2 - j}\right) =$$

$$= \frac{a_1 a_2 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 - a_1 a_3 b_2 j - a_3 b_1 j - a_2 a_3^2 b_1 - a_2 a_3 b_3 + a_2 a_3 b_1 j + a_2 b_3 j}{(a_2 - j)(a_3 - j)} +$$

$$+ j\frac{a_1 a_2^2 b_3 + a_1 a_2 b_2 - a_1 a_2 b_3 j - a_1 b_2 j - a_1 a_2 a_3 b_1 - a_1 a_2 b_3 + a_2 a_3 b_1 j + a_2 b_3 j}{(a_1 - j)(a_2 - j)} =$$

$$= \frac{1}{a_2 - j}\left(\frac{b_2 j + a_2 a_3 b_1 j^2 - a_1 a_3 b_2 j - a_3 b_1 j - a_2 a_3^2 b_1 - a_2 a_3 b_3 + a_2 a_3 b_1 j + a_2 b_3 j}{a_3 - j} + \right.$$

$$\left. + \frac{a_1 a_2^2 b_3 j + a_1 a_2 b_2 j - a_1 a_2 b_3 - a_1 b_2 j^2 - b_1 j^2 - a_2 a_3 b_1 j^2 + a_2 b_3 j^2}{a_1 - j}\right) =$$

$$= \frac{1}{(a_1 - j)(a_2 - j)(a_3 - j)}\left(a_1 b_2 j - b_1 - a_1^2 a_3 b_2 j - a_1 a_3 b_1 j - a_1 a_2 a_3^2 b_1 j - b_3 j + \right.$$

$$+ a_1 a_2 b_3 j - b_2 j^2 + a_2 a_3 b_1 + a_1 a_3 b_2 j^2 + a_3 b_1 j^2 + a_2 a_3^2 b_1 j + a_2 a_3 b_3 j - a_2 b_3 j^2 +$$

$$+ a_2 b_3 j^2 + b_2 j^2 + b_3 j - a_1 a_3 b_2 j^2 - a_3 b_1 j^2 + a_2 a_3 b_1 j^2 + a_2 a_3 b_3 j^2 -$$

$$\left. - a_1 a_2^2 b_3 j^2 - a_1 a_2 b_2 j^2 - a_1 a_2 b_3 j + a_1 b_2 + b_1 - a_2 a_3 b_1 - a_2 b_3\right) =$$

$$= \frac{1}{(a_1 - j)(a_2 - j)(a_3 - j)}\Big(- a_1 b_2 j^2 - b_1 - a_1^2 a_3 b_2 j - a_1 a_3 b_1 j - a_3 b_1 j - b_3 j -$$

$$- a_2 a_3^2 b_1 - a_2 a_3 b_3 - a_1 a_2^2 b_3 j^2 - a_1 a_2 b_2 j^2 - a_2 b_3 \Big) =$$

$$= -\frac{1}{(a_1 - j)(a_2 - j)(a_3 - j)}\Big(a_1^2 a_2^2 a_3^2 b_2 - a_1^3 a_2 a_3^2 b_2 +$$

$$+ a_1^2 a_2 a_3^2 b_1 + a_1 a_2 a_3^2 b_1 + a_2 a_3^2 b_1 + a_2 a_3 b_3 + a_1^3 a_2^4 a_3^2 b_3 + a_1^3 a_2^3 a_3^2 b_2 + a_2 b_3 \Big) =$$

$$= -\frac{1}{(a_1 - j)(a_2 - j)(a_3 - j)}\Big[a_2 a_3^2 b_1 \left(1 + a_1 + a_1^2\right) + a_1^3 a_2 a_3^2 b_2 \left(1 + a_2 + a_2^2\right) +$$

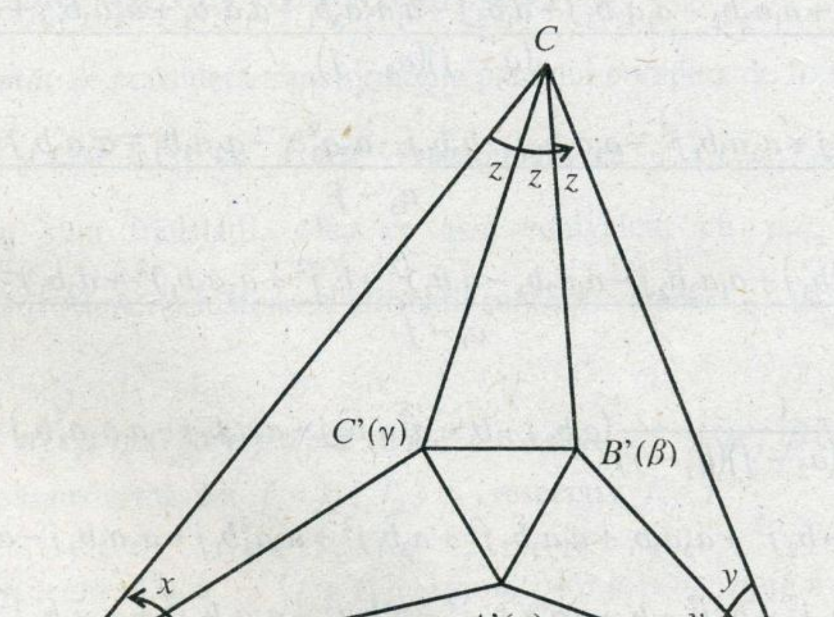
$$+ a_2 b_3 \left(1 + a_3 + a_1^3 + a_1^3 a_2^3 a_3^2\right)\Big] =$$

$$= -\frac{a_2 a_3^2}{(a_1 - j)(a_2 - j)(a_3 - j)}\Big[a_1^3 a_2^3 b_3 \left(1 + a_3 + a_3^2\right) + a_1^3 b_2 \left(1 + a_2 + a_2^2\right) + b_1 \left(1 + a_1 + a_1^2\right)\Big].$$

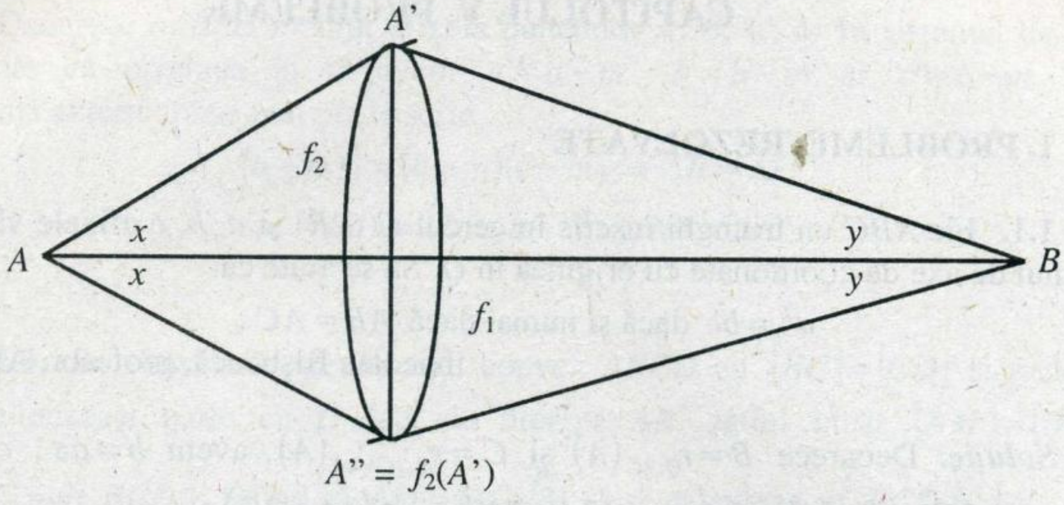
16. TEOREMA LUI MORLEY

Teoremă: Punctele de intersecție ale trisectoarelor adiacente într-un triunghi ABC, $A'(\alpha)$, $B'(\beta)$, $C'(\gamma)$, formează un triunghi echilateral.

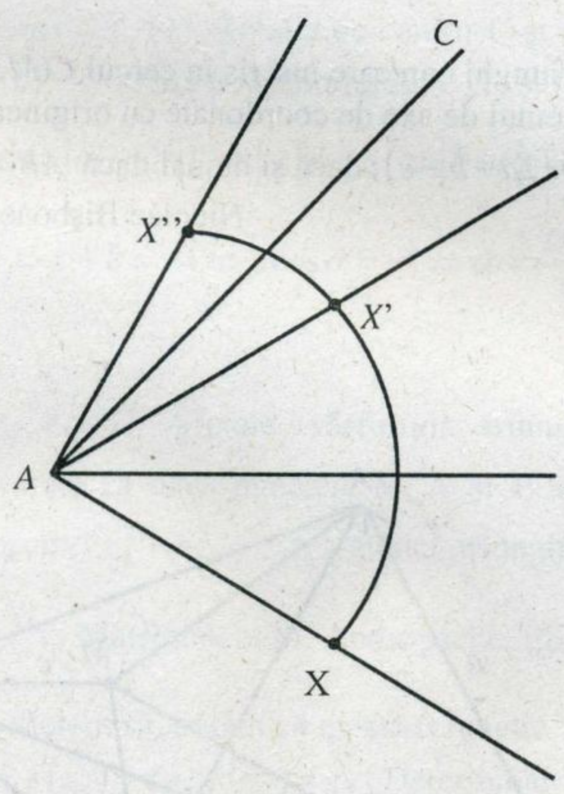
Soluție: Considerăm rotațiile $f_1 = r_{A,2x}$, $f_2 = r_{B,2y}$, $f_3 = r_{C,2z}$, de centre A, B, C, de unghiuri $x = \frac{1}{3}\hat{A}$, $y = \frac{1}{3}\hat{B}$, $z = \frac{1}{3}\hat{C}$.



Notăm A', B', C', punctele fixe ale transformărilor $f_1 \circ f_2$, $f_2 \circ f_3$, $f_3 \circ f_1$.



Pentru a demonstra că triunghiul $A'B'C'$ este echilateral este sufficient să demonstrăm, cu ajutorul teoremei anterioare că $f_1^3 \circ f_2^3 \circ f_3^3 = 1_C$. Compunerea $s_{AC} \circ s_{AB}$ a simetriilor s_{AC} şi s_{AB} în raport cu dreptele AC şi AB este o rotaţie de centru A şi unghi $6x$.



Prin urmare, $f_1^3 = s_{AC} \circ s_{AB}$ şi analog $f_2^3 = s_{BA} \circ s_{BC}$, $f_3^3 = s_{CB} \circ s_{CA}$. Rezultă:

$$f_1^3 \circ f_2^3 \circ f_3^3 = s_{AC} \circ s_{AB} \circ s_{BA} \circ s_{BC} \circ s_{CB} \circ s_{CA} = 1_C .$$