INDUCŢIA MATEMATICĂ

de GHEORGHE ECKSTEIN

Puteţi demonstra, prin inducţie, afirmaţia $P(n)$:

"Suma $\sum_{k=1}^{n} k^3$ *este pătrat perfect ?"*

$P(1)$ este $1^3 = 1^2$ evident adevărată, dar ştiind $\sum_{k=1}^{n} k^3 = x^2$, avem $\sum_{k=1}^{n} k^3 = x^2 + (n+1)^3$ despre care nu avem cum să demonstrăm că e pătrat perfect. După cum ştim cu toţii afirmaţia mai "tare" (mai precisă)

$$P(n):\ 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

se demonstrează foarte uşor (prin inducţie). Adesea o afirmaţie mai precisă, mai generală sau mai completă se poate demonstra prin inducţie în vreme ce afirmaţia mai slabă nu. Vom ilustra prin câteva exemple această situaţie (denumită uneori "paradoxul cercetătorului").

Exemplul 1. *Şirul* (a_n) *este definit prin* $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{2n-1}{2n+2} a_n$. *Să se arate că* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k < 1, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

(Juriu O.I.M. - Islanda)

Soluţie. Deoarece $s_n < s_{n+1}$, din $s_n < 1$ nu putem demonstra $s_{n+1} < 1$. Demonstrăm în schimb afirmaţia (relativ uşor de descoperit) :

$$P(n): a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + 2na_n = 1.$$

$P(1)$ este $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ şi, din $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + (2n+2)a_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots$ $\ldots + a_n + (2n-1)a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + 2na_n$ rezultă $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Exemplul 2. *Fie* (F_n) *şirul lui Fibonacci*

$$\left(F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\right).$$

Demonstraţi $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$.

Soluţie. (Să uităm că ştim formula explicită pentru F_n care ne permite să facem verificarea prin calcul direct). Fie $P(n)$ afirmaţia din enunţ ($P(1)$: $1^2+1^2 = 2$ e adevărată), să încercăm să arătăm $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

$$F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 = F_{n+1}^2 + \left(F_n + F_{n+1}\right)^2 = F_n^2 + F_{n+1}^2 + \left(2F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2\right) \overset{P(n)}{=}$$

$$= F_{2n+1} + \left(2F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2\right) \overset{?}{=} F_{2n+3}.$$

Pentru a deduce ultima egalitate am avea nevoie de :

$Q(n)$: $2F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{2n+2}$ ($Q(1)$ este adevărată).

Să vedem dacă $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$.

$$2F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+2}^2 = 2F_{n+1}\left(F_n + F_{n+1}\right) + F_{n+2}^2 = \left(2F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2\right) + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 \overset{Q(n)}{=}$$

$$= F_{2n+2} + \left(F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2\right) \overset{P(n+1)}{=} F_{2n+2} + F_{2n+3} = F_{2n+4}.$$

Am demonstrat deci că $P(n) \wedge Q(n)$ e adevărată, prin schema

$$P(n) \wedge Q(n) \Rightarrow P(n+1)$$

$$P(n+1) \wedge Q(n) \Rightarrow Q(n+1).$$

Pentru exemplul următor presupuneţi că vreţi să demonstraţi unui elev de clasa a X-a.

Exemplul 3. $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} < \frac{7}{10}, \forall n \geq 1$.

Avem $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$,

deci (a_n) fiind crescător, nu putem demonstra inegalitatea prin inducţie. Bineînţeles, voi ştiţi că şirul $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ converge în constanta lui

Euler deci $a_n = x_{2n} - x_n + \ln 2$ converge (crescător) la $\ln 2 < \frac{7}{10}$ sau puteţi scrie $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \to \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$, dar nu puteţi folosi aceste argumente.

Cum şirul $\frac{k}{n}$ converge descrescător ($k > 0$ la zero sunt şanse ca $b_n = a_n + \frac{k}{n}$ să fie descrescător (cu limita ln2, deci cu termeni $< \frac{7}{10}$) începând de la un anumit rang). Să vedem :

$$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n + \frac{k}{n+1} - \frac{k}{n} = \frac{(1-4k)n - 2k}{2n(n+1)(2n+1)}$$

este negativ pentru $k \geq \frac{1}{4}$. Alegem deci $k = \frac{1}{4}$ (pentru ca $b_n \leq \frac{7}{10}$ să aibă loc cât mai repede). Avem deci :

$$b_n = a_n + \frac{1}{4n}, b_{n+1} < b_n \text{ şi } b_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{7}{10},$$

deci $a_1 < a_2 < a_3 < b_3 = \frac{7}{10} > b_4 > \ldots > b_n > \ldots$ Gata !

Următoarele două exemple au fost date la baraje în ultimii 10 ani.

Exemplul 4. $\sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n}}} < 2, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

(*G. Eckstein* -1989)

Necazul, ca şi adineaori este ca membrul stâng este un şir crescător.

În soluţia "oficială" se demonstrează afirmaţia generală

$$\sqrt{k+\sqrt{k+1+\ldots+\sqrt{k+n}}} < k+1, \forall k,n \in \mathbf{N}^*.$$

Soluţie alternativă :

$$a_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}} < \sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n-1+n}}} = b_n$$

$$b_{n+1} = \sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{n+n+1}}}}\ .$$

Avem $b_{n+1} \leq b_n$ căci $\sqrt{2n+1} \leq n$ pentru $n \geq 3$ şi $b_3 = \sqrt{1+\sqrt{5}} < 2$ şi, ca mai sus, problema e rezolvată.

Exemplul 5. $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n}{n} + \frac{n}{x_n}$. *Să se arate* $\left[x_n^2\right] = n, \forall n \geq 4$.

L. Panaitopol - 1990

Evident am vrea să arătăm prin inducţie (şirul fiind recurent) $n \leq x_n^2 < n+1$. Avem $x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = \frac{13}{6}$ deci $x_4^2 = \frac{169}{36} = 4\frac{25}{36} \in (4,5)$.

Pentru inducţie constatăm că pe $(0,n] \supset \left(0, \sqrt{n+1}\right)$ funcţia $f_n(x) = \frac{x}{n} + \frac{n}{x}$ este descrescătoare deci

$$n < x_n^2 \Rightarrow x_{n+1} = f_n(x_n) < f_n\left(\sqrt{n}\right) = \frac{n+1}{\sqrt{n}} \left(> \sqrt{n+2}\right) \text{ şi}$$

$$x_n^2 < n+1 \Rightarrow x_{n+1} = f_n(x_n) > f_n\left(\sqrt{n+1}\right) = \frac{n^2+n+1}{n\sqrt{n+1}} =$$

$$= \sqrt{n+1} + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1+\frac{2}{n}}.$$

Prin urmare ipoteza

$$A(n):\left(n < x_n^2\right)$$

este prea slabă pentru a implica $B(n+1):\left(x_n^2 < n+2\right)$, în schimb

$$B(n):\left(x_n^2 < n+1\right)$$

implică concluzia mai tare $C(n+1):\left(x_{n+1}^2 < n+1+\frac{2}{n}\right)$.

Apare natural încercarea de a demonstra prin inducţie

$$n + \frac{2}{n-1} \overset{C(n)}{<} x_n^2 \overset{B(n)}{<} n+1.$$

Constatăm că $C(4)$ e adevăratăşi am văzut deja $B(n) \Rightarrow C(n+1)$.

Rămâne să verificăm $C(n) \Rightarrow B(n+1)$.

$$C(n): x_n > \sqrt{\frac{n^2-n+2}{n-1}} \Rightarrow x_{n+1} = f_n(x_n) < \sqrt{\frac{n^2-n+2}{n^3-n^2}} + \sqrt{\frac{n^3-n^2}{n^2-n+2}} \overset{?}{<} \sqrt{n+2}$$

$$\left(\overset{?}{<}\right) \Leftrightarrow \frac{n^2-n+2}{n^3-n^2} + \frac{n^3-n^2}{n^2-n+2} < n \Leftrightarrow \frac{n^2-n+2}{n^3-n^2} < \frac{2n}{n^2-n+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(n^2-n+2\right)^2 < 2n^4 - 2n^3 \Leftrightarrow 5n^2 + 4 < n^4 + 4n,$$

evident adevărată.

Exemplul 6. (Inegalitatea lui *Carteman*). $\forall n \in \mathbf{N}^*$ *şi* $a_1, a_2, \ldots, a_n \subset \mathbf{R}_+$ *are loc* :

$$a_1 + \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} + \ldots + \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq e(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Soluţie. Notăm $G_k = (a_1 a_2 \ldots a_k)^{1/k}$. Să demonstrăm prin inducţie

$$P(n): G_1 + G_2 + \ldots + G_{n-1} + (n+1)G_n \leq e(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

$P(1)$ este $2a_1 < ea_1$ evident adevărată. Pentru $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

$$G_1 + G_2 + \ldots + G_n + (n+2)G_{n+1} =$$

$$= \left(G_1 + G_2 + \ldots + G_{n-1} + (n+1)G_n\right) - nG_n + (n+2)G_{n+1} \overset{P(n)}{\leq}$$

$$\leq e(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - nG_n + (n+2)G_{n+1},$$

deci ar fi suficient să demonstrăm :

$$(*) \qquad -nG_n + (n+2)G_{n+1} \leq ea_{n+1}.$$

Notăm $G_n := g^{n+1}, a_{n+1} = x^{n+1}$ şi (*) se scrie

$$ex^{n+1} - (n+2)g^n x + ng^{n+1} \geq 0, x, g \geq 0.$$

Notând $f(x)$ membrul stâng, avem $f'(x) = (n+1)ex^n - (n+2)g^n$ deci unica rădăcină a derivatei este $x_0 = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} g e^{-\frac{1}{n}}$.

Cum $f(0) \geq 0$, $f(+\infty) = +\infty$ pentru a arăta $f(x) \geq 0$ este suficient să arătăm $f(x_0) \geq 0$. Avem :

$$f(x_0) = g^{n+1}\left[e\frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} e^{-\frac{n+1}{n}} - (n+2)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} e^{-\frac{1}{n}} + n\right] =$$

$$= g^{n+1} e^{-\frac{1}{n}}\left[\left(\frac{1}{n+1} - (n+1)\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} + ne^{\frac{1}{n}}\right],$$

deci $f(x_0) \geq 0$ este echivalent cu $ne^{\frac{1}{n}} \geq \left(n + \frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$ sau

$$e \geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

care ştim că e adevărată.

Exemplul 7. (Inegalitatea lui *Hardy*, [Kvant, p.999-Kurliandcik]).

$\forall n \in \mathbf{N}^*$ *şi* $a_1, a_2, \ldots, a_n \subset \mathbf{R}_+$ *are loc* :

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1}} + \frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}} + \ldots + \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} < 2\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right).$$

Vom demonstra prin inducţie inegalitatea mai tare :

$$P(n): \frac{1}{\frac{1}{a_1}} + \frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}} + \ldots + \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}} + \frac{\frac{n^2}{2}}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}} < 2\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right).$$

$P(1)$ este $\frac{3}{2}a_1 < 2a_1$ evident adevărată, iar pentru $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ este suficient să demonstrăm :

$$-\frac{\frac{n^2}{2}}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}} + \frac{(n+1) + \frac{(n+1)^2}{2}}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}} < 2a_{n+1}.$$

Notând $a := \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}, x := \frac{1}{a_{n+1}}$, ultima inegalitate se scrie echivalent :

$$-\frac{n^2}{a} + \frac{(n+1)(n+3)}{a+x} < \frac{4}{x} \quad (a,\, x > 0),$$

adică

$$n^2(a+x)x - \left(n^2 + 4n + 3\right)ax + 4a(a+x) > 0 \text{ sau}$$

$$n^2x^2 - (4n-1)ax + 4a^2 > 0 \text{ deci}$$

$$(nx - 2a)^2 + ax > 0,$$

evident adevărată.

Să revin asupra ultimelor două inegalităţi. Ele se încadrează în următorul tip mai general :

$$f_1(a_1) + f_2(a_1, a_2) + \ldots + f_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le$$
$$\le g_1(a_1) + g_2(a_1, a_2) + \ldots + g_n(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

în care, din păcate, $f_k(a_1, a_2, \ldots, a_k) \not\le g_k(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Pentru a putea demonstra prin inducţie (eventual "întărită") este necesar (nu şi suficient) ca, pentru $\lambda \in \mathbf{R}$, $\sup\limits_x \left(\lambda f_n(a_1, \ldots, a_{n-1}, x) - g_n(x)\right)$ să se exprime ca

$$F_n(\lambda)\cdot f_{n-1}(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})$$

Se poate arăta că factorul e respectiv 2 din membrul drept nu poate fi îmbunătăţit.

Până acum am discutat enunţuri care "strigau" după inducţie (mai mult sau mai puţin). Sunt probleme în care nu e străveziu că ar fi bună inducţia, dacă ni se spune că da, atunci după cine ? Dacă ştim după cine, atunci cum ? Mă aştept să cunoaşteţi următoarea

Teoremă (*Cauchy–Davenport*). *Fie p un număr prim şi A, B două submulţimi nevide ale lui $\mathbf{Z}_p$. Atunci*

$|A+B|\ge\min\{|A|+|B|-1,p\}$, ($A+B$ este mulţimea $\{a+b \mid a\in A, b\in B\}$).

Demonstraţie. Dacă $\max\{|A|,|B|\}=p$ atunci evident $|A+B|=p$. Presupunem $|A|\le|B|$. Demonstrăm prin inducţie după $|A|$. Dacă $|A|=1$ atunci $|A+B|=|B|=|A|+|B|-1$.

Presupunem afirmaţia adevărată pentru $|A|\le n$ şi vrem s-o demonstrăm pentru $|A|=n+1$ ($<p$, altfel e adevărată). Ideea pasului de inducţie :

$$A+B\supset(A\cap B)+(A\cup B) \text{ şi } |A|+|B|=|A\cap B|+|A\cup B|.$$

Mici ajutoare pentru a ajunge la a asigura ce dorim :

Pentru $x\in\mathbf{Z}_p\setminus\{0\}$, $|A|=|xA|$, $|B|=|xB|$, $|A+B|=|xA+xB|$.

Alegând convenabil x putem presupune $\exists z\in\mathbf{Z}_p$ cu $\{z,z+1\}\subset xA$.

Pe de altă parte, $\exists y\in xB$ cu $y+1\notin xB$ şi înlocuind xA cu $y-z+xA$ avem :

$$|A+B|=|y-z+xA+xB|\ge\left|\big((y-z+xA)\cap xB\big)+\big((y-z+xA)\cup xB\big)\right|\ge$$
$$\ge|(y-z+xA)\cap xB|+|(y-z+xA)\cup xB|-1=$$
$$=|y-z+xA|+|xB|-1=|A|+|B|-1,$$

am aplicat ipoteza de inducţie mulţimii $(y-z+xA)\cap xB$, care are cel mult $|A|-1$ elemente.

Încercaţi să demonstraţi o teoremă foarte asemănătoare :

Teoremă (*Erdös*). *Fie $A\subset\mathbf{Z}_p$ (p prim) cu $|A|\ge 2$. Demonstraţi*

$$|2\wedge A|\ge\min\{2|A|-3,p\}$$

unde $2\wedge A=\{x+y\in A, x\ne y\}$.

Revenim la inducţii mai obişnuite.

Fie P o mulţime parţial ordonată finită. Se numeşte *lanţ* o submulţime total ordonată a lui P. Se numeşte *antilanţ* o submulţime cu elementele două câte două necomparabile. Se numeşte *lăţime* a lui P cardinalul maxim al unui antilanţ.

Teorema lui *Dilworth*. *P este reuniunea a m lanţuri, unde m este lăţimea lui P.*

Demonstraţie. Inducţie după $|P|$.

Fie a un element maximal al lui P şi n lăţimea lui $P' = P \setminus \{a\}$. P' este reuniunea a n lanţuri $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Trebuie să arătăm că P este reuniunea a n lanţuri sau conţine un antilanţ cu $n+1$ elemente.

Fie $a_i = \max\left\{x \in L_i \middle| x \text{ este conţinut într-un lanţ de } n \text{ elemente}\right\}$.

Atunci $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ este antilanţ. Dacă $A \bigcup \{a\}$ e antilanţ e gata.

În caz contrar $a > a_i$ pentru un anumit i şi

$$K = \{a\} \bigcup \left\{x \in L_i \middle| x \le a_i\right\} \text{ este lanţ.}$$

Cum $P \setminus K$ nu conţine antilanţuri de n elemente, $P \setminus K$ e reuniunea a $n-1$ lanţuri.

Remarcă. Putem aborda teoremele *Cauchy–Davenport*, *Erdös* printr-o metodă total diferită.

Fie p un număr prim şi $A, B \subset \mathbf{Z}_p$, $0 < |B| = l \le k = |A|$.

Dorim informaţii despre $|A+B|, |C|$ unde $C = \left\{x+y \middle| x \in A, y \in B, x \ne y\right\}$ şi $2^\wedge A$ unde $2^\wedge A = \left\{x+y \middle| x, y \in A, x \ne y\right\}$. Începem cu două leme :

Lema 1. *Dacă* $p(x,y) \in \mathbf{Z}_p[x,y]$, $\operatorname{grad}_x p \le k-1$, $\operatorname{grad}_y p \le l-1$ *şi* $p(a,b) = 0$ $\forall a \in A$, $b \in B$ *atunci* $p(x,y) \equiv 0$.

Demonstraţie. $p(x,y) = \sum_{i=0}^{k-1} q_i(y) x^i$. Pentru $b \in B$ polinomul

$$p(x,b) = \sum_{i=0}^{k-1} q_i(b) x^i$$

are k rădăcini în $\mathbf{Z}_p$ deci $q_i(b) = 0 \forall b \in B$ de unde $q_i = 0$ deci $p = 0$.

Lema 2. *Pentru fiecare* $m \in \mathbf{N}^*$ $\exists r_m \in \mathbf{Z}_p[x]$ *cu* $\operatorname{grad} r_m \le k-1$ *astfel că* $r_m(a) = a^m \forall a \in A$.

Demonstraţie. Cu teorema împărţirii cu rest

$$x^m = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)c(x) + r_m(x)$$

(sau cu polinomul de interpolare al lui *Lagrange*).

Observaţie. Evident $\forall m \in \mathbf{N}^* \exists s_m \in \mathbf{Z}_p[y]$, $\operatorname{grad} s_m \le l-1$ cu $s_m(b) = b^m \forall b \in B$.

Teorema 1 (*Cauchy–Davenport*). $|A+B| \ge \min\{k+l-1, p\}$.

Teorema 2. $k > l \Rightarrow |C| \ge \min\{k+l-2, p\}$.

Teorema 3 (*Erdös*). $|2\wedge A| \ge \min\{2k-3, p\}$.

Demonstraţia teoremei 1. Dacă $k+l-1 > p$ atunci putem înlocui A, B cu submulţimi $A' \subset A, B' \subset B$ pentru care $k'+l'-1 = p$ sau putem demonstra simplu $A+B = \mathbf{Z}_p$: $\forall z \in \mathbf{Z}_p$, $|z-A|+|B| = k+l > p$ deci $(z-A) \cap B \ne 0$ adică $\exists a \in A, b \in B$ cu $z-a=b$.

Fie $k+l-1 \le p$. Să presupunem $|A+B| \le k+l-2$. Alegem m astfel ca $(A+B)+m = k+l-2$ şi considerăm polinomul

$$p(x,y) = (x+y)^m \prod_{c \in A+B} (x+y-c) = (x+y)^{k+l-2} + \text{ceva de grad mai mic} =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{i+j=k+l-2} p_{ij} x^i y^j.$$

Avem $p_{k-1,l-1} = \binom{k+l-2}{k-1} \ne 0$ şi $p(a,b) = 0$, $\forall a \in A, b \in B$.

Construim un nou polinom $p^*(x, y)$ înlocuind monoamele $p_{ij} x^i y^i$ astfel

$$p_{ij} x^i y^j \to \begin{cases} p_{ij} x^i y^j & \text{dacă } i \le k-1, j \le l-1 \\ p_{ij} r_i(x) y^j & \text{dacă } i > k-1 \ (\text{deci } j \le l-2) \\ p_{ij} x^i s_j(y) & \text{dacă } j > l-1 \ (\text{deci } i \le k-2). \end{cases}$$

Avem $p^*(a,b) = 0 \forall a \in A, b \in B$, $\operatorname{grad}_x p^* = k-1$, $\operatorname{grad}_y p^* = l-1$ deci p^* ar trebui să fie nul (cf. Lemei 1) dar

$$p^*(x,y) = \binom{k+l-2}{k-1} x^{k-1} y^{l-1} + \text{termeni de grad mai mic, absurd.}$$

Demonstraţia teoremei 2. Putem presupune $k+l-2 \le p$ (ca la T.1).

Presupunem $|C| \le k+l-3$, alegem m astfel ca $|C|+m = k+l-3$ şi considerăm polinomul

$$p(x,y) = (x-y)(x+y)^m \prod_{c \in C} (x+y-c)$$

care are gradul $k+l-2$,

$$p(x,y)=(x-y)(x+y)^{k+l-3}+\text{ceva de grad mai mic }=\sum_{i,j=0}^{i+j=k+l-2}p_{ij}x^iy^j\,.$$

$$p_{k-1,l-1}=\binom{k+l-3}{k-2}-\binom{k+l-3}{l-2}=\frac{(k+l-3)!(k-l)}{(k-1)!(l-1)!}\neq 0\,.$$

Avem $p(a,b)=0\ \forall a\in A, b\in B$, construim $p^*(x,y)$ ca la T.1 şi ajungem la aceeaşi contradicţie.

Demonstraţia teoremei 3. Fie $A\subset \mathbf{Z}_p, |A|=k\geq 2$ şi $a\in A$. Considerăm $B=A\setminus\{a\}$. Avem $2^\wedge A\supset\{x+y \mid x\in A, y\in B, x\neq y\}$ deci

$$|2^\wedge A|\geq \min\{k+l-1-2, p\}\,.$$