

Clasa a X-a

Soluții

Problema 1

Numărăm progresiile în funcție de valorile posibile ale rației. Progresiile cu rația 1 sunt $\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \dots, \{n-2, n-1, n\}$, în număr de $n-2$. Progresiile cu rația 2 sunt $\{1, 3, 5\}, \dots, \{n-4, n-2, n\}$ în număr de $n-4$. Dacă n este par, $n = 2k$, rația maximă este $k-1$ și sunt 2 progresii de rație $k-1$: $\{1, k, 2k-1\}, \{2, k+1, 2k\}$, deci numărul total de progresii este $2 + 4 + \dots + 2(k-1) = k(k-1)$.

Dacă n este impar, $n = 2k+1$ rația maximă este k și avem o singură progresie de rației k ; $\{1, k+1, 2k+1\}$. Numărul total de progresii este $1 + 3 + \dots + (2k-1) = k^2$.

În ambele cazuri numărul total de progresii poate fi dat și prin formula $\left[\frac{n}{2}\right] \left[\frac{n-1}{2}\right]$.

Punctaj recomandat:

Soluție completă, cu aflarea numărului progresiilor în funcție de $[n/2]$ sau paritatea lui n : 7 puncte.

Punctaje parțiale:

a) Calculul numărului de progresii doar pentru n par sau n impar: 3 puncte; b) Calculul numărului progresiilor care au în mijloc un număr dat: 3 puncte;

c) Calculul numărului de rații posibile: 1 punct;

d) Numărarea progresiilor cu o rație particulară 1 punct.

Se pot adăuna numai punctajele parțiale a) + c) sau b) + c).

Problema 2

Vom arăta că pentru orice $n \geq 3$, există astfel de numere. Într-adevăr, pentru $n = 3$ avem

$$3! \cdot 5! = 6!.$$

Să presupunem că pentru un n oarecare există $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ astfel încât

$$a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_{n-1}! = a_n!.$$

Fie $b = a_n! - 1$. Atunci $a_n < b$ și

$$a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_{n-1}! \cdot b! = a_n! \cdot (a_n! - 1)! = (a_n!)!$$

Astfel, renotând $b = a_n$, $a_n! = a_{n+1}$, avem

$$a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_{n-1}! \cdot a_n! = a_{n+1}!.$$

(De exemplu, din $3! \cdot 5! = 6! = 720$, obținem $3! \cdot 5! \cdot 719! = 720!$, etc.)

Punctaj recomandat:

Soluție completă 7 puncte.

Punctaje parțiale:

- a) Exemple de tipul $a!b! = c!$: 2 puncte;
 b) Ideea de a încerca inducția: 1 punct;
 c) Răspunsul $n \geq 3$ fără demonstrație: 1 punct.
 Punctajele parțiale nu se cumulează.

Problema 3

Notăm $\overrightarrow{AB} = x, \overrightarrow{AC} = y, \overrightarrow{AD} = z$. Atunci $\overrightarrow{MN} = \frac{-x+y+z}{2}$ și din $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ obținem

$$\begin{aligned}xz + xy - x^2 &= 0 \\ y^2 - z^2 - xy + xz &= 0.\end{aligned}\tag{*}$$

Scăzând egalitățile obținem

$$z^2 = (x - y)^2,$$

de unde rezultă $AD = BC$. Adunând egalitățile obținem $y^2 = (x - z)^2$, adică $AC = BD$.

Folosind a doua perpendicularitate din enunț obținem și $AB = CD$.

Punctaj recomandat:

Introducerea vectorilor și calculul vectorilor de tipul \overrightarrow{MN} : 1 punct

Utilizarea produsului scalar pentru perpendicularitate și obținerea relațiilor (*): 2 puncte

Finalizare: 4 puncte.

Orice altă soluție sintetică corectă se va nota corepunzător. De exemplu, folosirea teoremei medianei pentru a arăta egalități de triunghiuri cu o latură comună: 3 puncte, finalizare: 4 puncte.

Problema 4

Presupunând $(\cos nx + i \sin ny)(\cos x + i \sin y) = \cos(n+1)x + i \sin(n+1)y$ obținem

$$\sin x \sin nx = \sin y \sin ny\tag{*}$$

Dacă $x < y$ atunci $\sin x < \sin y$ și deci $|\sin nx| \geq |\sin ny|$. Din egalitatea $(\cos x + i \sin y)^n = \cos nx + i \sin ny$ trecând la module, obținem

$$(\cos^2 x + \sin^2 y)^n = \cos^2 nx + \sin^2 ny.\tag{**}$$

Avem atunci

$$\begin{aligned}1 &= (\cos^2 x + \sin^2 x)^n < (\cos^2 x + \sin^2 y)^n \\ &= \cos^2 nx + \sin^2 ny \leq \cos^2 nx + \sin^2 nx = 1,\end{aligned}$$

contradicție.

Analog, dacă $x > y$, se obține o contradicție. Prin urmare $x = y$.

Punctaj recomandat:

Obținerea egalității (*): 1 punct;

Obținerea egalității (**): 2 puncte;

Finalizare: 4 puncte.