

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului  
Serviciul Național de Evaluare și Examinare

**A 45-a Olimpiadă Națională de Matematică**  
**Etapă județeană și a Municipiului București**

**6 martie 2004**

**CLASA A XII-A**

**Subiectul 1**

Fie  $n \geq 2$  un întreg, și  $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Notăm

$$S_r = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z}_2) \mid \text{rang } A = r\}.$$

- a) Să se arate că pentru orice  $A \in S_n$  și  $B \in S_r$ ,  $AB$  se află în  $S_r$ ;
- b) Să se calculeze suma  $\sum_{X \in S_r} X$ .

**Subiectul 2**

Fie  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă cu proprietatea că

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 g(x)dx$$

pentru orice  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ , continuă și nederivabilă. Să se arate că  $f$  este o funcție constantă.

**Subiectul 3**

Inelul  $A$  are următoarele proprietăți:

- i) elementul unitate  $1_A$  are ordin  $p$  număr prim;
- ii) există  $B \subset A$  cu  $p$  elemente cu proprietatea: *oricare ar fi  $x, y \in A$ , există  $b \in B$  care verifică  $xy = byx$ .*

Să se arate că

- a) pentru  $k \in \mathbf{Z}$ ,  $(k, p) = 1$ , elementul  $k \cdot 1_A$  este inversabil;
- b)  $1_A \in B$ ;
- c)  $A$  este inel comutativ.

**Subiectul 4**

Fie  $a, b \in (0, 1)$  și  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție continuă astfel încât

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^{ax} f(t)dt + \int_0^{bx} f(t)dt, \text{ pentru orice } x \in [0, 1].$$

- a) Să se arate că dacă  $a + b < 1$  atunci  $f = 0$ .
- b) Să se arate că dacă  $a + b = 1$  atunci  $f$  este constantă.

*Timp de lucru 3 ore.*

*Toate subiectele sunt obligatorii.*