

A 45-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa județeană și a Municipiului București

6 martie 2004

CLASA A XI-A

Subiectul 1

Fie șirul definit de $x_0 > 0$ și pentru orice n natural $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\sqrt{x_n}}$.

Să se calculeze a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^3}{n^2}$.

Subiectul 2

a) Fie $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbf{R}$, $a_{ij} = \sin(x_i - y_j)$, $i, j = 1, 2, 3$ și $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3$.
Să se arate că $\det A = 0$.

b) Se consideră numerele complexe nenule z_1, z_2, \dots, z_{2n} , $n \geq 3$, astfel încât $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_{n+3}|$ și $\arg z_1 \geq \dots \geq \arg(z_{n+3})$. Considerăm numerele $b_{ij} = |z_i - z_{j+n}|$, pentru $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ și $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n$. Să se arate că $\det B = 0$.

Subiectul 3

Fie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție cu proprietatea (P):

pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$ avem $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \in \{f(a), f(b)\}$.

a) Să se dea un exemplu de funcție neconstantă cu proprietatea (P).

b) Dacă f are proprietatea (P) și este continuă atunci f este constantă.

Subiectul 4

Se consideră matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_p(\mathbf{C})$ cu $a_{12} = a_{23} = \dots = a_{p-1,p} = 1$ și $a_{ij} = 0$ pentru ceilalți indici.

a) Să se arate că $A^{p-1} \neq 0_p$ și $A^p = 0_p$.

b) Să se arate că dacă $X \in \mathcal{M}_p(\mathbf{C})$ și $AX = XA$, atunci există $a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbf{C}$ astfel încât

$$X = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_p \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} \\ 0 & 0 & a_1 & \dots & a_{p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

c) Să se arate că dacă $B, C \in \mathcal{M}_p(\mathbf{C})$ astfel încât $(I_p + A)^n = B^n + C^n$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, atunci $B = 0_p$ sau $C = 0_p$.

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.