

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului  
Serviciul Național de Evaluare și Examinare

**A 45-a Olimpiadă Națională de Matematică**  
**Etapa județeană și a Municipiului București**

**6 martie 2004**

**CLASA A-X-A**

**Subiectul 1**

Fie  $n$  un număr natural,  $n \geq 3$ . Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente, conținute în mulțimea  $\{1, 2, \dots, n\}$  care formează o progresie aritmetică.

**Subiectul 2**

Să se determine numerele naturale  $n$ ,  $n \geq 3$ , cu proprietatea: *există numerele naturale distincte  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , astfel încât*

$$a_1!a_2! \cdots a_{n-1}! = a_n!$$

**Subiectul 3**

În tetraedrul  $ABCD$  se notează cu  $M, N, P, Q$  mijloacele muchiilor  $AB, CD, AC$ , respectiv  $BD$ . Se știe că  $MN$  este perpendiculara comună a dreptelor  $AB$  și  $CD$  iar  $PQ$  este perpendiculara comună a dreptelor  $AC$  și  $BD$ .

Să se arate că  $AB = CD$ ,  $BC = DA$  și  $AC = BD$ .

**Subiectul 4**

Fie  $x, y \in (0, \pi/2)$ . Să se arate că dacă egalitatea

$$(\cos x + i \sin y)^n = \cos nx + i \sin ny$$

este adevărată pentru două numere naturale nenule consecutive, atunci este adevărată pentru toate numerele naturale  $n$ .

*Timp de lucru 3 ore.*

*Toate subiectele sunt obligatorii.*